

POLE MAGNETYCZNE
czyli jedna strona zjawisk
elektromagnetycznych

Marian Talar

7 stycznia 2007

1 Wymagania egzaminacyjne na egzamin maturalny - poziom rozszerzony: fizyka 2005-2006

Zjawiska magnetyczne

Standard 1. *Posługiwanie się wielkościami i pojęciami fizycznymi do opisywania zjawisk.*

1. Wyznaczanie siły działającej na ciało w wyniku oddziaływania magnetycznego
2. Przedstawianie pól magnetycznych za pomocą linii pola
3. Opisywanie własności pola magnetycznego za pomocą natężenia pola i indukcji pola magnetycznego
4. Obliczanie wartości wektora indukcji pola magnetycznego wytworzonego przez przewodnik prostoliniowy, kołowy i zwojnicę
5. Opisywanie wpływu pola magnetycznego na ruch ciał
6. Opisywanie ruchu cząstki naładowanej w polu magnetycznym
7. Obliczanie wartości siły elektrodynamicznej i siły Lorentza
8. Opisywanie wzajemnego oddziaływania przewodników z prądem
9. Posługiwanie się pojęciem strumienia indukcji pola magnetycznego
10. Opisywanie warunków występowania zjawiska indukcji elektromagnetycznej i samoindukcji
11. Obliczanie wartości SEM indukcji, SEM samoindukcji i indukcyjności zwojnicy
12. Zastosowanie reguły Lenza do ustalania kierunku przepływu prądu indukcyjnego
13. Opisywanie działania prądnicy prądu przemiennego i transformatora
14. Obliczanie wartości skutecznych natężenia i napięcia prądu przemiennego

15. Uwzględnianie zależności natężenia prądu od częstotliwości w obwodach zawierających indukcyjność i pojemność
16. Analizowanie procesów zachodzących w obwodzie LC
17. Jakościowe sformułowanie praw Maxwella
18. Obliczanie długości fal elektromagnetycznych w zależności od parametrów obwodu LC
19. Znajomość własności fal elektromagnetycznych i ich zastosowania
20. Porównywanie własności magnetycznych substancji dia- para- i ferromagnetycznych
21. Wyjaśnianie wpływu substancji dia- para- i ferromagnetycznych na pole magnetyczne
22. Przykłady zastosowań w życiu i technice urządzeń wykorzystujących właściwości magnetyczne materii

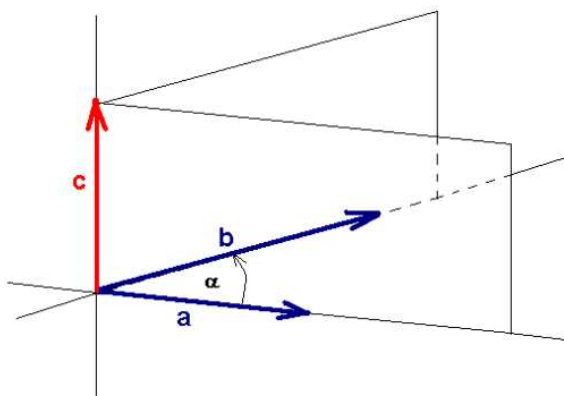
2 Trochę o wektorach

2.1 Iloczyn wektorowy

Iloczyn wektorowy wektorów \vec{a} i \vec{b} jest to wektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, którego wartość jest równa

$$c = a b \sin \alpha \quad (1)$$

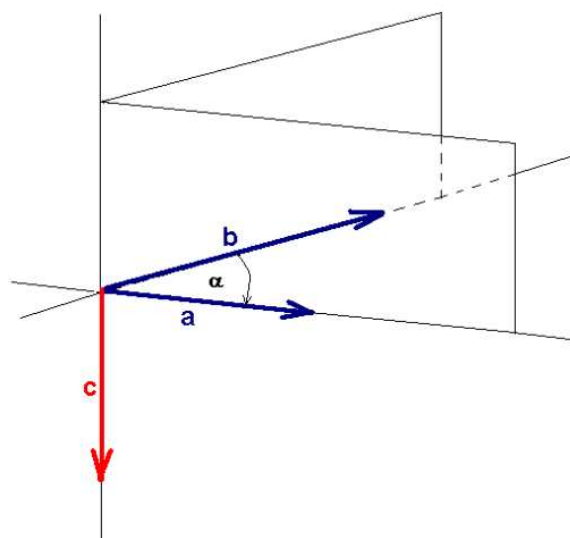
gdzie α jest mniejszym z kątów między wektorami \vec{a} i \vec{b} . Kierunek wektora \vec{c} jest prostopadły do płaszczyzny zawierającej wektory \vec{a} i \vec{b} . Zwrot wektora \vec{c} wyznacza ruch śruby prawoskrętnej, którą należy obracać w kierunku od wektora \vec{a} do wektora \vec{b} wzdłuż kąta α . Iloczyn wektorowy został zilustrowany na poniższym rysunku.



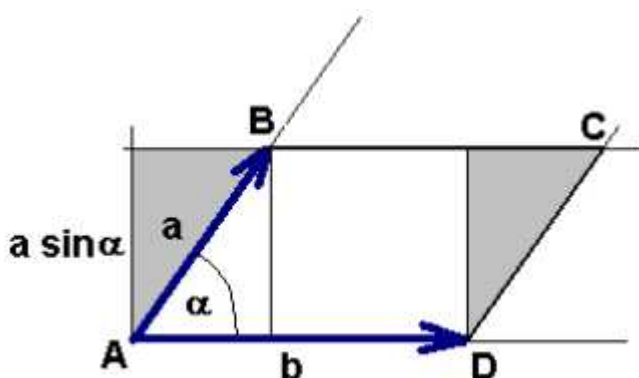
Iloczyn wektorowy nie jest przemienny:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

Zwrot wektora $\vec{b} \times \vec{a}$ jest przeciwny do zwrotu $\vec{a} \times \vec{b}$, ponieważ śruba prawoskrętna kręcąc się od wektora \vec{b} do wektora \vec{a} wzdłuż kąta α porusza się w przeciwną stronę niż gdyby kręciła się od wektora \vec{a} do wektora \vec{b} . Ilustruje to poniższy rysunek.



Wartość iloczynu wektorowego $\vec{a} \times \vec{b}$ jest równa polu powierzchni równoległoboku utworzonego przez wektory \vec{a} i \vec{b} . Zobacz na rysunek poniżej.



Pole powierzchni równoległoboku ABCD jest równe:

$$P_{ABCD} = (a \sin \alpha) \cdot b = a b \sin \alpha = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Jeżeli wektory \vec{a} i \vec{b} są prostopadłe to wartość ich iloczynu wektorowego jest równa iloczynowi długości tych wektorów (pole prostokąta), a trójka wektorów \vec{a} , \vec{b} i \vec{c} tworzy układ wektorów wzajemnie do siebie prostopadłych tak jak w prawoskrętnym, prostokątnym układzie współrzędnych.

$$c = a b \quad \text{gdy} \quad \vec{a} \perp \vec{b}$$

Jeżeli wektory \vec{a} i \vec{b} są równoległe to ich iloczyn wektorowy jest równy zero (równoległobok redukuje się do odcinka, który nie ma pola powierzchni)

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \quad \text{gdy} \quad \vec{a} \parallel \vec{b}$$

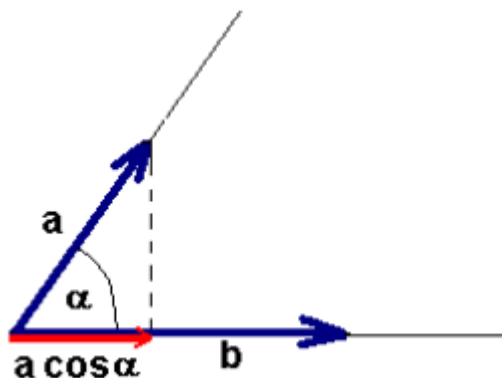
2.2 Iloczyn skalarny

Iloczyn skalarny wektorów \vec{a} i \vec{b} jest liczbą zdefiniowaną w następujący sposób:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = a b \cos \alpha \quad (2)$$

gdzie α jest mniejszym z kątów między wektorami \vec{a} i \vec{b} .

Iloczyn skalarny dwóch wektorów jest więc iloczynem długości jednego z nich i długości rzutu prostopadłego drugiego z tych wektorów na kierunek wyznaczony przez pierwszy. Ilustruje to poniższy rysunek.



Jeżeli wektory są równoległe to iloczyn skalarny tych wektorów jest równy iloczynowi ich długości wziętemu ze znakiem plus gdy wektory mają zwroty zgodne, a ze znakiem minus gdy mają zwroty przeciwne. W przypadku, gdy wektory są prostopadłe ich iloczyn skalarny jest równy zero.

3 Indukcja magnetyczna

3.1 Wektor indukcji magnetycznej

Wektor indukcji magnetycznej \vec{B} jest podstawowym wektorem charakteryzującym pole magnetyczne. Definiuje się go w oparciu o oddziaływanie pola magnetycznego na poruszającą się cząstkę naładowaną. Przyjmijmy, że w

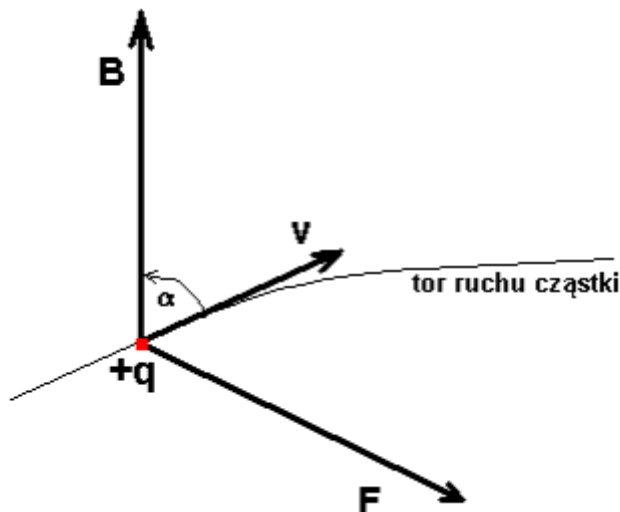
obszarze, w którym cząstka się porusza pole magnetyczne jest jednorodne to znaczy w każdym punkcie tego obszaru wektor indukcji jest taki sam. Siła oddziaływania pola magnetycznego na poruszającą się cząstkę zależy od kierunku ruchu. Dla pewnego kierunku w tym obszarze, na cząstkę, która się w tym kierunku porusza pole magnetyczne nie oddziałuje żadną siłą - kierunek ten definiuje się jako kierunek wektora indukcji. Dla kierunku do niego prostopadłego siła oddziaływania pola magnetycznego na cząstkę naładowaną przyjmuje wartość największą F_{max} . Siła ta jest wprost proporcjonalna do iloczynu prędkości i ładunku: $F_{max} \sim qv$. Współczynnik proporcjonalności jest z definicji wartością wektora indukcji magnetycznej:

$$B = \frac{F_{max}}{qv} \quad (3)$$

Ponieważ siła działa na poruszającą się cząstkę zawsze poprzecznie w stosunku do wektora prędkości i wektora indukcji, więc ogólnie wektor indukcji można zdefiniować za pomocą iloczynu wektorowego:

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} \quad (4)$$

Siłę \vec{F} działającą na cząstkę naładowaną poruszającą się w polu magnetycznym nazywa się **siłą Lorentza**. Istotny w tym wzorze jest znak ładunku q , który określa przy danym zwrocie wektora prędkości zwrot siły \vec{F} .



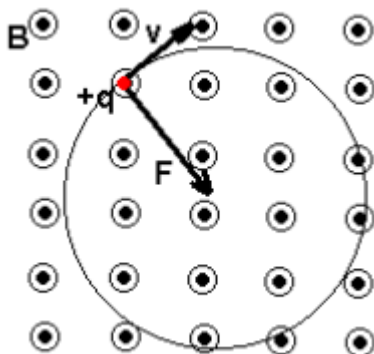
Stałe pole magnetyczne odchyła tor ruchu cząstki od kierunku prostoliniowego, nie zmienia jednak jej prędkości. Siła \vec{F} jest w każdej chwili prostopadła do wektora prędkości nie wykonuje więc pracy, a tym samym nie zwiększa ani

nie zmniejsza jej energii kinetycznej, w rezultacie wartość prędkości cząstki pozostaje stała.

Gdy wektor prędkości jest prostopadły do wektora indukcji \vec{B} wygodnie jest wtedy posłużyć się symbolicznym przedstawieniem wektora prostopadłego do płaszczyzny rysunku:

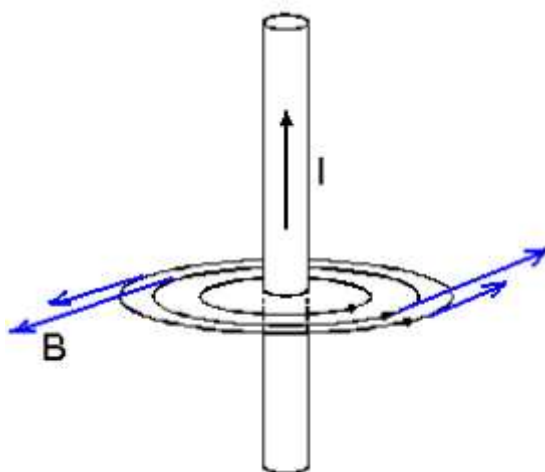
- ⊗ wektor zwrócony za płaszczyznę rysunku
- ⊙ wektor zwrócony przed rysunek w stronę patrzącego

Cząstka poruszająca się w jednorodnym polu magnetycznym w ten sposób, że wektor prędkości jest prostopadły do wektora indukcji porusza się ruchem jednostajnym po okręgu. Ilustruje to poniższy rysunek.

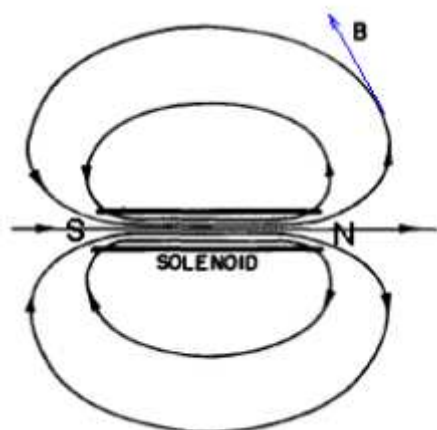


Pole magnetyczne wizualnie przedstawia się za pomocą linii. W każdym punkcie linii pola wektor indukcji \vec{B} jest do niej styczny. Linie te nie są liniami sił tak jak w przypadku pola elektrostatycznego, ponieważ nie wyznaczają kierunków działania sił na poruszające się w polu ładunki, lecz jedynie kierunki wektorów indukcji, dlatego nazywa się je również liniami indukcji pola magnetycznego.

Wokół przewodnika prostoliniowego linie pola magnetycznego mają kształt okręgów leżących w płaszczyznach prostopadłych do przewodnika, których środki leżą na przewodniku.



Kształt linii pola wokół solenoidu jest identyczny jak kształt linii wokół płaskiego magnesu sztabkowego. Wyraźne są tutaj dwa **bieguny magnetyczne** przy końcach solenoidu, tak jak w przypadku magnesu sztabkowego lub w przypadku Ziemi. Bieguny te tradycyjnie oznacza się literami N i S i nazywa odpowiednio biegunem magnetycznym "północnym" i "południowym".



Jednostką indukcji magnetycznej jest **tesla** (symbolicznie T). Pole magnetyczne ma indukcję jednej tesli, jeżeli na cząstkę o ładunku jednego kulomba poruszającą się prostopadle do linii pola magnetycznego z szybkością jednego metra na sekundę pole to oddziałuje siłą jednego niutona.

$$1T = \frac{1N}{1C \cdot 1\frac{m}{s}} \quad (5)$$

3.2 Prawo Ampera (Oersteda) - pole magnetyczne prądu

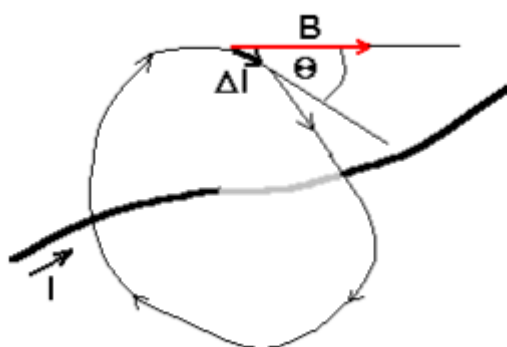
Wokół przewodników z prądem elektrycznym powstaje pole magnetyczne (Hans Christian Oersted - 1820). Ilościową zależność między natężeniem prądu a polem magnetycznym \vec{B} przedstawia prawo Ampere'a:

$$\sum \vec{B} \circ \vec{\Delta l} = \mu_0 I \quad (6)$$

gdzie sumowanie przebiega wzdłuż dowolnej krzywej zamkniętej obiegającej prąd I , \vec{B} jest wektorem indukcji w punktach krzywej, a $\vec{\Delta l}$ jest bardzo małym elementem krzywej skierowanym tak jak wektor indukcji. Stała μ_0 nazywa się **przenikalnością magnetyczną próżni** i równa jest

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A}$$

Prawo Ampere'a ilustruje poniższy rysunek.



Gdy z $\vec{\Delta l}$ zmierzamy do zera wtedy sumowanie przechodzi w całkowanie i prawo Ampere'a można zapisać w postaci całkowej:

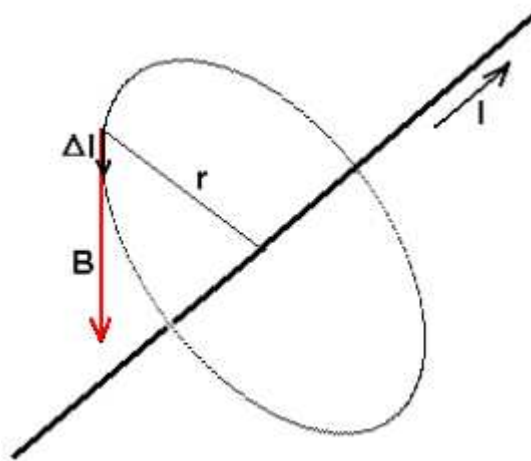
$$\oint \vec{B} \circ \vec{dl} = \mu_0 I$$

Pole magnetyczne przewodnika prostoliniowego Wykorzystajmy prawo Ampere'a do obliczenia indukcji magnetycznej wokół przewodnika prostoliniowego, przez który płynie prąd o natężeniu I . Wiadomo, że wokół takiego przewodnika linie pola magnetycznego mają kształt okręgów leżących w płaszczyznach prostopadłych do przewodnika o środkach na przewodniku. Wektor indukcji w dowolnym punkcie jest styczny do takiego okręgu, a jego zwrot określa **reguła prawej dłoni**:

jeżeli palcami prawej dłoni obejmiemy przewodnik tak, aby kciuk wskazywał kierunek przepływu prądu wtedy kierunek, w którym zginają się palce pokazuje zwrot wektora indukcji.

W każdym punkcie wektor indukcji \vec{B} jest równoległy do elementu $\vec{\Delta l}$ i ma stałą wartość w odległości r od przewodnika. Iloczyn $\vec{B} \circ \vec{\Delta l}$ w prawie Ampere'a można więc przedstawić w postaci

$$\vec{B} \circ \vec{\Delta l} = B \Delta l \cos 0^\circ = B \Delta l$$



$$\sum \vec{B} \circ \vec{\Delta l} = \sum B \Delta l = B \sum \Delta l = B \cdot 2\pi r$$

więc na podstawie prawa Ampere'a (6) mamy

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

a stąd indukcja w dowolnym punkcie odległym o r od przewodnika ma wartość

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (7)$$

Pole magnetyczne solenoidu Rozważmy przypadek idealnego solenoidu, to znaczy cewki nieskończenie długiej o równo i ciasno nawiniętych zwojach. Pole magnetyczne takiej cewki zawiera się całkowicie wewnątrz zwojów i jest jednorodne.



Niech krzywą, wzdłuż której będziemy obliczać sumę $\sum \vec{B} \circ \vec{\Delta l}$ będzie prostokąt abcd. Suma wzdłuż boku ab jest równa zero, gdyż $B = 0$ na zewnątrz solenoidu. Wzdłuż boków ad i bc sumy też są równe zero, gdyż wektor \vec{B} jest wzdłuż tych dróg prostopadły do $\vec{\Delta l}$. Pozostaje odcinek dc gdzie $\vec{B} \parallel \vec{\Delta l}$ więc $\vec{B} \circ \vec{\Delta l} = B \Delta l$

$$\sum \vec{B} \circ \vec{\Delta l} = B \sum \Delta l = B h$$

gdzie h jest długością odcinka dc. Na podstawie prawa Ampere'a (6) mamy więc

$$B h = \mu_0 I_c$$

gdzie I_c jest całkowitym prądem objętym krzywą abcd.

Jeżeli n oznacza ilość zwojów solenoidu na jednostkę długości wtedy ilość zwojów objętych krzywą wynosi nh , a jeżeli natężenie prądu płynącego w solenoidzie wynosi I wtedy

$$I_c = nhI$$

oraz

$$B h = \mu_0 nhI$$

Ostatecznie indukcja solenoidu wyraża się wzorem

$$B = \mu_0 nI \quad (8)$$

Równanie to, chociaż wyprowadzone dla solenoidu idealnego można z powodzeniem stosować dla solenoidów realnych w celu obliczenia indukcji w pobliżu punktów leżących blisko środka solenoidu.

Prawo Ampere'a rzadko można wykorzystać do obliczenia indukcji magnetycznej. Jedynie dla szczególnie symetrycznych przypadków jest ono wygodne. Dla innych rozkładów prądów trzeba się posłużyć wygodniejszą metodą. Może tu posłużyć prawo Biota-Savarta.

3.3 Prawo Biota-Savarta

Chcąc obliczyć w jakimś punkcie indukcję magnetyczną \vec{B} wytworzoną przez dowolny rozkład prądów dzielimy każdy z prądów na nieskończenie małe elementy $i\vec{\Delta l}$, obliczamy wkłady $\vec{\Delta B}$ od każdego elementu a następnie sumujemy je i otrzymujemy wektor indukcji magnetycznej jako wektor wypadkowy. Wkład każdego elementu prądu dany jest właśnie przez **prawo Biota-Savarta** i ma postać:

$$\vec{\Delta B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\vec{\Delta l} \times \vec{r}}{r^3} \quad (9)$$

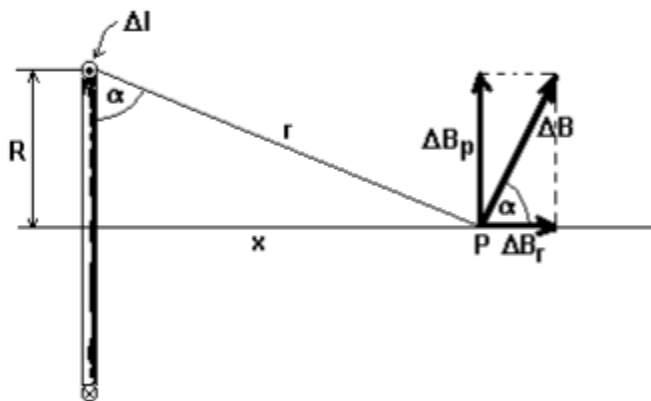
gdzie \vec{r} jest promieniem wodzącym poprowadzonym od elementu prądu do punktu, w którym obliczamy wektor indukcji \vec{B} . Wypadkowa indukcja jest sumą wektorową wszystkich wkładów od całego przewodnika

$$\vec{B} = \sum \vec{\Delta B}$$

lub, gdy zmierzamy z elementami $\vec{\Delta l}$ do zera, całką

$$\vec{B} = \int d\vec{B}$$

Jako przykład zastosowania tego prawa podamy sposób obliczenia indukcji magnetycznej przewodnika kołowego w punkcie P na osi koła.



Element prądu $i\vec{\Delta l}$ u góry przewodnika jest skierowany w stronę patrzącego i jest prostopadły do \vec{r} . Płaszczyzna utworzona przez te dwa wektory jest prostopadła do płaszczyzny rysunku. Wkład $\vec{\Delta B}$ jako proporcjonalny do $i\vec{\Delta l} \times \vec{r}$ jest prostopadły do \vec{r} , a więc leży w płaszczyźnie rysunku. Rozkładamy wektor $\vec{\Delta B}$ na dwie składowe: $\vec{\Delta B}_p$ - składowa prostopadła do osi koła przewodnika i $\vec{\Delta B}_r$; składowa równoległa do osi. Wkład do \vec{B} dają tylko składowe równoległe ponieważ składowe prostopadłe redukują się po dodaniu wkładów położonych symetrycznie względem środka koła po drugiej stronie.

$$\Delta B_r = \Delta B \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

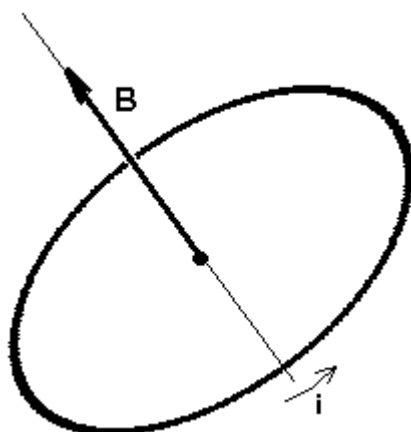
$$\begin{aligned} \Delta B_r &= \frac{\mu_0 i \vec{\Delta l} \times \vec{r}}{4\pi r^3} \cdot \cos \alpha \\ &= \frac{\mu_0 i \Delta l \cdot r}{4\pi r^3} \cdot \cos \alpha \\ &= \frac{\mu_0 i \Delta l}{4\pi r^2} \cdot \cos \alpha \\ &= \frac{\mu_0 i \Delta l}{4\pi R^2 + x^2} \cdot \cos \alpha \\ &= \frac{\mu_0 i \Delta l}{4\pi R^2 + x^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}} \\ &= \frac{\mu_0 i R}{4\pi (R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \Delta l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \sum \Delta B_r \\ &= \frac{\mu_0 i R}{4\pi (R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \sum \Delta l \\ &= \frac{\mu_0 i R}{4\pi (R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot 2\pi R \\ &= \frac{\mu_0 i R^2}{2(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

W środku koła, gdzie $x = 0$, indukcja magnetyczna wynosi:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2R} \quad (10)$$

Taka pojedyncza pętla kołowa z prądem elektrycznym nosi nazwę **dipola magnetycznego** (jest to rodzaj małego magnesika sztabkowego o dwóch biegunach i indukcji danej wzorem (10)). Ilustrację dipola przedstawia poniższy rysunek.



4 Oddziaływanie pola magnetycznego na przewodniki z prądem elektrycznym

4.1 Siła elektrodynamiczna

Jeżeli zamiast pojedynczego ładunku (jak było przy rozpatrywaniu siły Lorentza (4)) weźmiemy cały strumień ładunków elektrycznych, na przykład płynących w prostoliniowym przewodniku i poddamy je oddziaływaniu pola magnetycznego otrzymamy w rezultacie siłę magnetyczną działającą na przewodnik. Jest to tak zwana siła elektrodynamiczna.

Założmy, że w przewodniku prostoliniowym płynie prąd stały o natężeniu I . Nośniki ładunku poruszają się ruchem jednostajnym z prędkością unoszenia \vec{v} . Niech długość przewodnika wynosi l . W czasie t przez przewodnik przepływa ładunek $q = It$. Łączna siła działająca na ten przewodnik, na podstawie wzoru (4) wynosi więc

$$\vec{F} = It \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

Ale $t \cdot \vec{v}$ jest wektorem o długości równej długości przewodnika l i kierunku pokrywającym się z kierunkiem przewodnika oraz o zwrocie wyznaczonym przez zwrot prędkości nośników ładunku. W przewodniku nośnikami są elektrony swobodne. Kierunek ich ruchu jest przeciwny do umownego kierunku

przepływu prądu. Jeżeli jednak zmienimy w powyższym równaniu znak ładunku i jednocześnie przyjmujemy zwrot \vec{v} zgodny z umownym kierunkiem prądu nie wpłynie to na zwrot siły F . Przyjmijmy więc, że $l \cdot \vec{v} = \vec{l}$ jest wektorem o długości równej długości przewodnika, kierunku pokrywającym się kierunkiem przewodnika a zwrot niech będzie wyznaczony przez umowny kierunek prądu. Powyższe równanie można wtedy zapisać w postaci

$$\vec{F} = I \vec{l} \times \vec{B} \quad (11)$$

Gdy przewodnik jest prostopadły do wektora indukcji w polu jednorodnym wtedy wartość siły elektrodynamicznej wyrazi się wzorem

$$F = BIl \quad (12)$$

Wzór ten jest podstawą do równoważnej definicji indukcji magnetycznej a jednocześnie jest bardziej praktyczny jako podstawa pomiaru indukcji pola magnetycznego. Według tego wzoru jednostka indukcji tesla to

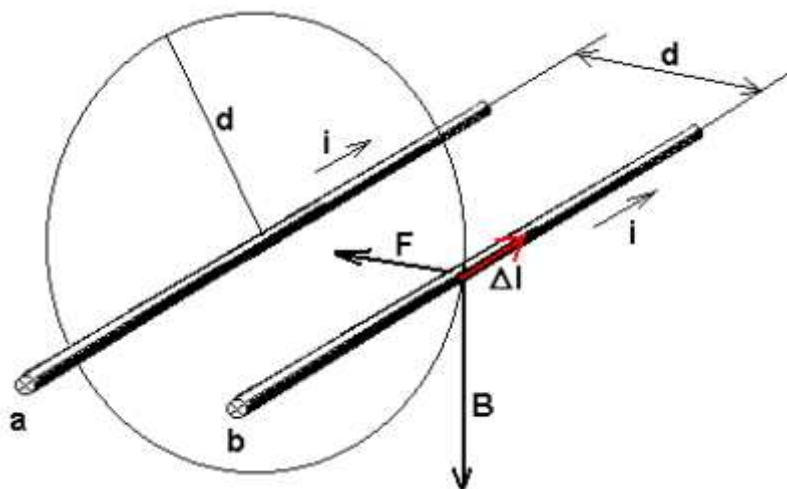
$$1T = \frac{1N}{1A \cdot 1m}$$

co pokrywa się z poprzednią definicją (5) gdyż $1A = \frac{1C}{1s}$.

Według tej definicji pole ma indukcję jednej tesli jeżeli na odcinek przewodnika prostoliniowego o długości jeden metr umieszczonego prostopadle do linii pola, przez który płynie prąd o natężeniu jednego ampera działa siła jednego niutona.

4.2 Wzajemne oddziaływanie dwóch przewodników prostoliniowych - definicja ampera

Rozważmy dwa długie przewodniki prostoliniowe a i b , równoległe do siebie, w których prąd o natężeniu i płynie w tych samych kierunkach. Odległość między przewodnikami wynosi d .



Przewodnik a wytwarza wokół siebie pole magnetyczne, którego indukcja w odległości d od przewodnika, zgodnie ze wzorem (7) ma wartość

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \quad (13)$$

Wektor indukcji w miejscu gdzie znajduje się przewodnik b zwrócony jest pionowo w dół prostopadle do przewodnika b. Ponieważ w przewodniku b płynie prąd więc pole magnetyczne przewodnika a oddziałuje siłą elektrodynamiczną \vec{F} na element Δl przewodnika b. Siła ta, na podstawie wzoru (12) ma wartość

$$F = Bi\Delta l$$

lub po podstawieniu wyrażenia (13) na B

$$F = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi d} \Delta l$$

Siła \vec{F} zwrócona jest w stronę przewodnika a.

Jeżeli rozważymy pole magnetyczne wytwarzane przez przewodnik b i jego oddziaływanie na przewodnik a sytuacja będzie symetryczna i można wobec tego stwierdzić, że dwa przewodniki prostoliniowe umieszczone równolegle do siebie w pewnej odległości, przez które płynie prąd w tym samym kierunku przyciągają się. Siła wzajemnego przyciągania na jednostkę długości dana jest wzorem

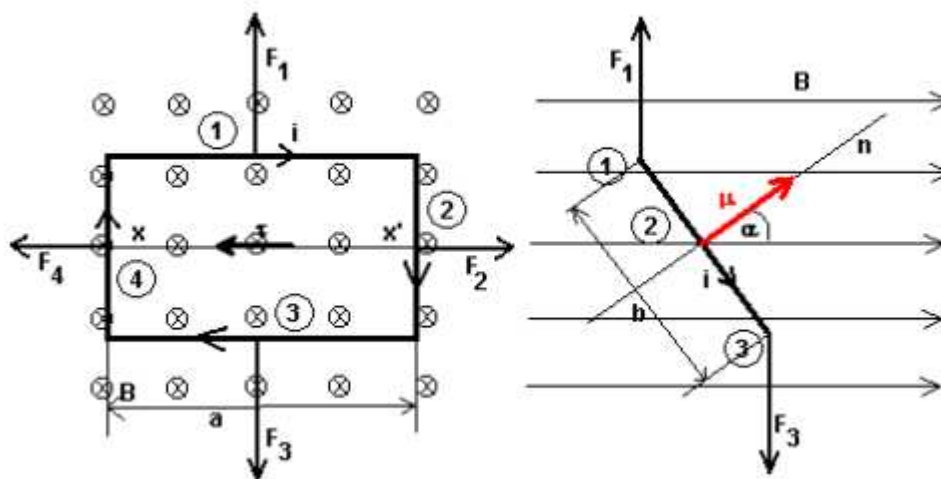
$$\frac{F}{\Delta l} = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi d} \quad (14)$$

Zależność ta jest podstawą definicji jednostki natężenia prądu elektrycznego w układzie SI - **1 ampera**. Przyjmuje się, że przewodniki odległe są o $d = 1\text{ m}$, $\Delta l = 1\text{ m}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{T} \cdot \text{m}}{\text{A}}$. Wystarczy tak dobrać natężenie prądu, aby siła działająca na 1 metr przewodnika wynosiła $F = 2 \cdot 10^{-7}\text{ N}$. Tak dobrane natężenie określa się mianem 1 ampera. Należy tu podkreślić, że wartość μ_0 została wybrana dowolnie, natomiast wartość natężenia prądu określana jako 1 amper została tak dobrana, aby dawała wymaganą siłę przyciągania na jednostkę długości. Praktycznym wzorcem 1 ampera jest tak zwana waga prądu znajdująca się w Narodowym Biurze Wzorców w USA.

4.3 Moment sił działających na zamknięty obwód z prądem. Magnetyczny moment dipolowy

Na pojedynczy przewodnik z prądem elektrycznym umieszczony w polu magnetycznym działa siła elektrodynamiczna prostopadła w stosunku do linii pola magnetycznego wypychająca ten przewodnik z pola. Natomiast na obwód zamknięty, w którym płynie prąd elektryczny działa moment skręcający sił elektrodynamicznych, które usiłują go tak obrócić wokół pewnej osi, aby magnetyczny moment dipolowy pokrywał się z kierunkiem linii indukcji magnetycznej. A oto jak dochodzimy do definicji momentu magnetycznego $\vec{\mu}$.

Rozważmy prostokątną ramkę przewodnika, przez którą płynie prąd o natężeniu i i umieszczoną w zewnętrznym polu magnetycznym jednorodnym o indukcji B .



Płaszczyzna ramki tworzy kąt α z liniami pola magnetycznego. Siły \vec{F}_2 i \vec{F}_4 o równych wartościach działające na części 2 i 4 ramki działają wzdłuż jednej

prostej i są przeciwnie zwrócone, a więc równoważą się.

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_4 = i\vec{b} \times \vec{B} \quad (15)$$

gdzie wektor \vec{b} ma długość boku ramki b , zwrot zgodny z kierunkiem prądu i tworzy kąt α z wektorem indukcji \vec{B} . Wartości sił \vec{F}_2 i \vec{F}_4 są równe

$$\begin{aligned} F_2 &= F_4 \\ &= ibB \sin(90^\circ - \alpha) \\ &= ibB \cos \alpha \end{aligned} \quad (16)$$

Na część górną ramki 1 działa siła \vec{F}_1

$$\vec{F}_1 = i\vec{a} \times \vec{B} \quad (17)$$

gdzie wektor \vec{a} zwrócony jest zgodnie z kierunkiem prądu i ma długość boku a ramki. Ponieważ wektor \vec{a} jest prostopadły do wektora indukcji \vec{B} więc wartość siły \vec{F}_1 wynosi

$$F_1 = iaB \quad (18)$$

Na część dolną ramki 2 działa siła \vec{F}_3 o wartości równej wartości siły \vec{F}_1 lecz przeciwnie zwrócona. Ponieważ siły \vec{F}_1 i \vec{F}_3 mają równe wartości i są przeciwnie zwrócone, ale nie działają wzdłuż jednej prostej gdy ramka jest w położeniu tak jak na rysunku, więc nie przesuwają ramki jako całości lecz powodują jej obrót wokół osi xx' . Każda z nich daje moment obrotowy względem osi xx' .

Moment obrotowy siły \vec{F}_1 wynosi

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_1 &= -\frac{1}{2}\vec{b} \times \vec{F}_1 \\ &= -\frac{1}{2}\vec{b} \times (i\vec{a} \times \vec{B}) \end{aligned} \quad (19)$$

moment obrotowy siły \vec{F}_3 wynosi

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_2 &= \frac{1}{2}\vec{b} \times \vec{F}_3 \\ &= -\frac{1}{2}\vec{b} \times (i\vec{a} \times \vec{B}) \end{aligned} \quad (20)$$

Łączny moment obydwu sił równy jest więc

$$\vec{\tau} = -\vec{b} \times (i\vec{a} \times \vec{B})$$

Patrząc od tyłu wektora $\vec{\tau}$ w stronę jego początku widzimy jak siły dające moment obrotowy obracają ramkę zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

W naszym przypadku $\vec{a} \times \vec{B}$ leży w płaszczyźnie wektora \vec{b} można więc napisać, że

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= -(i\vec{b} \times \vec{a}) \times \vec{B} \\ &= (i\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{B}\end{aligned}$$

Wartość wektora $\vec{a} \times \vec{b}$ jest polem prostokąta ramki z prądem. **Iloczyn powierzchni obwodu i natężenia prądu, który w nim płynie jest z definicji magnetycznym momentem dipolowym** tego obwodu. Kierunek wektora magnetycznego momentu dipolowego jest prostopadły do płaszczyzny obwodu (prosta n), zwrot wektora momentu magnetycznego dipola jest określony zgodnie z regułą śruby prawoskrętnej - kręcąc śrubę zgodnie z kierunkiem płynącego prądu ruch śruby wskazuje nam zwrot wektora momentu magnetycznego.

Dla naszej ramki możemy więc ostatecznie napisać

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} \quad (21)$$

gdzie

$$\vec{\mu} = i\vec{a} \times \vec{b} \quad (22)$$

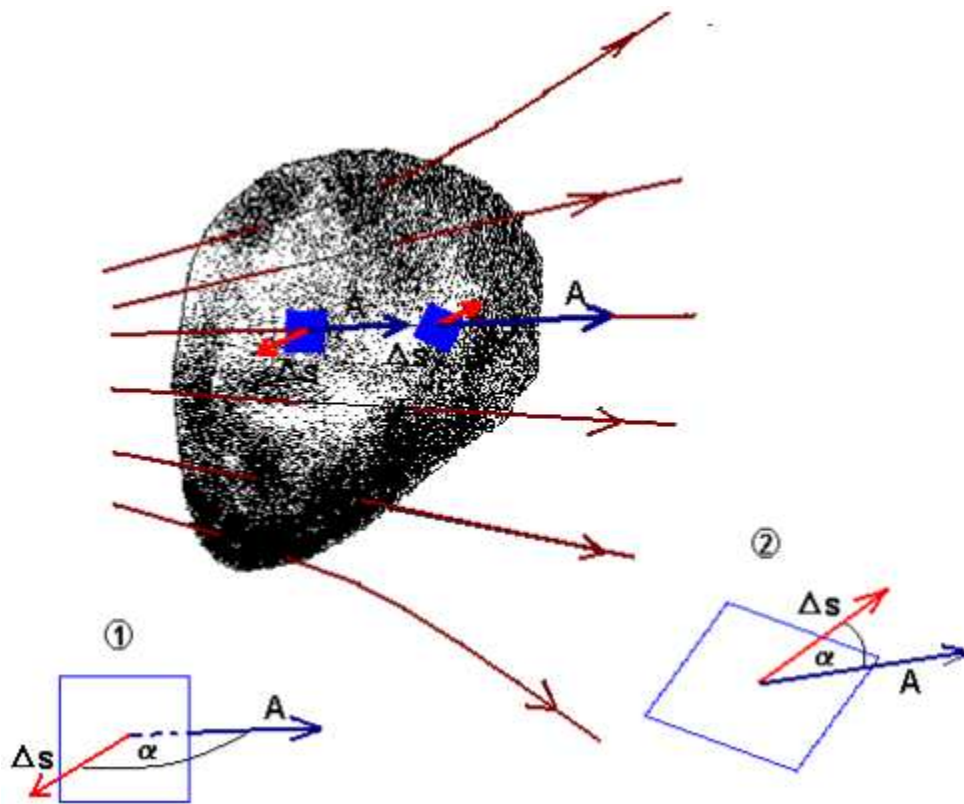
jest magnetycznym momentem dipolowym ramki z prądem.

5 Indukcja elektromagnetyczna

5.1 Prawo indukcji Faradaya

Zjawisko indukcji elektromagnetycznej, opisywane prawem Faradaya polega na powstawaniu prądu elektrycznego w obwodzie zamkniętym (lub napięcia elektrycznego na końcach obwodu otwartego) generowanego przez tak zwaną siłę elektromotoryczną indukcji SEM (oznaczaną też przez \mathcal{E}). SEM jest skutkiem zmian strumienia pola magnetycznego, w którym zanurzony jest obwód. Prawo Faradaya stwierdza, że wielkość indukowanej SEM jest równa szybkości zmian strumienia indukcji pola magnetycznego przez powierzchnię objętą obwodem.

$$\mathcal{E} = -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} \quad (23)$$



Aby obliczyć strumień pola wektorowego \vec{A} przez powierzchnię S dzielimy tę powierzchnię na nieskończenie małe elementy o powierzchni Δs każdy i przypisujemy im wektor o długości równej powierzchni elementu, normalny do powierzchni i skierowany na zewnątrz. Ponieważ element jest nieskończenie mały, więc można przyjąć, że na całej powierzchni elementu wektor pola \vec{A} jest stały. Obliczamy iloczyn skalarny $\vec{\Delta s} \circ \vec{A}$, a następnie sumujemy wszystkie tak obliczone iloczyny po całej powierzchni S .

$$\Phi_A = \Sigma \vec{\Delta s} \circ \vec{A} \quad (24)$$

co można przy przejściu do granicy zapisać w postaci całki

$$\Phi_A = \int \vec{A} \circ \vec{ds} \quad (25)$$

W przypadku 1 na powyższym rysunku wkład do strumienia jest ujemny ponieważ $\alpha > 90^\circ$ i $\vec{\Delta s} \circ \vec{A} = A \Delta s \cos \alpha < 0$ (linia pola wchodzi do wnętrza). W przypadku 2 wkład do strumienia jest dodatni ponieważ $\alpha < 90^\circ$ i $\vec{\Delta s} \circ \vec{A} = A \Delta s \cos \alpha > 0$ (linia pola wychodzi z wnętrza). Strumień można liczyć po dowolnej powierzchni: zamkniętej lub otwartej.

Gdy polem wektorowym \vec{A} jest pole magnetyczne \vec{B} i strumień tego pola przez powierzchnię objętą przewodnikiem ulega zmianie w czasie, wtedy mamy do czynienia ze zjawiskiem indukcji elektromagnetycznej opisaną wyżej przedstawionym prawem Faradaya. Kierunek indukowanego w przewodniku prądu określa tak zwana **reguła Lenza**, która mówi że: *kierunek indukowanego prądu jest taki, że pole magnetyczne tego prądu przeciwstawia się zmianie, która go wywołała*. Znak minus w prawie Faradaya wyraża właśnie to przeciwstawianie się. Jeżeli obwód jest otwarty to kierunek SEM można określić rozważając co by się działo, gdyby obwód ten zamknąć.

Jednostką strumienia jest **weber** (Wb)

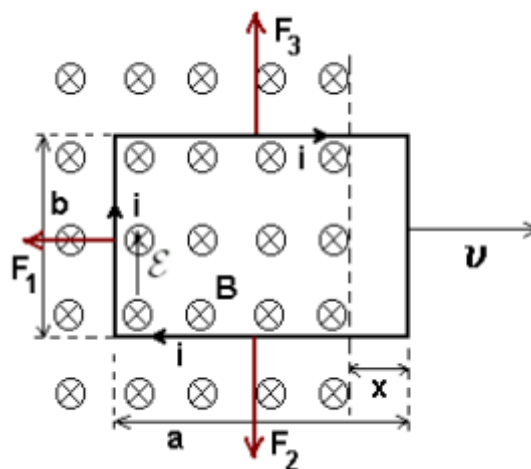
$$1 \text{ Wb} = \frac{1 \text{ T}}{1 \text{ m}^2} \quad (26)$$

Jeżeli strumień wyrazimy w weberach a czas w sekundach wtedy SEM indukcji dostaniemy w woltach.

5.2 Przykłady obliczania SEM

Ramka prostokątna poruszająca się w polu magnetycznym. Siła elektromotoryczna indukowana w sposób opisany w tym i następnym przykładzie nosi nazwę **dynamicznej SEM**.

Dane jest jednorodne pole magnetyczne \vec{B} w ograniczonym obszarze skierowane prostopadle do płaszczyzny rysunku. Z obszaru tego pola wysuwana jest prostokątna ramka leżąca w płaszczyźnie prostopadłej do linii pola ze stałą prędkością \vec{v} . Ramka wykonana jest z materiału przewodzącego prąd elektryczny.



Na skutek ruchu ramki zmienia się strumień pola magnetycznego przez powierzchnię ramki. Gdy prawy bok ramki w chwili t_1 znajdował się na skraju obszaru pola strumień przez powierzchnię ramki wynosił

$$\Phi_1 = B S = B a b$$

W chwili t_2 prawy bok ramki przebył drogę równą x i znalazł się w położeniu takim jak na powyższym rysunku. Wtedy strumień pola przez powierzchnię ramki wynosił

$$\Phi_2 = B S_1 = B (a - x) b$$

Z powyższych równań otrzymujemy zmianę strumienia

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= \Phi_2 - \Phi_1 \\ &= B (a - x) b - B a b \\ &= B a b - B x b - B a b \\ &= -B x b \end{aligned}$$

Strumień zmienił się o $\Delta\Phi$ w czasie $\Delta t = t_2 - t_1$, więc zgodnie z prawem Faradaya (23) w ramce indukuje się SEM o wartości \mathcal{E} równej

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \\ &= -\frac{-B x b}{\Delta t} \\ &= B b \frac{x}{\Delta t} \\ &= B b v \end{aligned} \tag{27}$$

gdzie v jest prędkością ruchu ramki. Warto zauważyć, że indukowana siła elektromotoryczna indukcji \mathcal{E} nie zależy od długości ramki a tylko od jej szerokości b .

Kierunek siły elektromotorycznej indukcji zgodnie z regułą Lenza jest taki, że przeciwdziała zmniejszaniu się strumienia pola magnetycznego przez powierzchnię ramki. Oznacza to, że prąd indukowany w ramce musi płynąć zgodnie z ruchem wskazówek zegara, aby jego pole magnetyczne miało zwrot taki jak zewnętrzne pole magnetyczne, w którym porusza się ramka. Wtedy pole indukowane dodaje się do pola zewnętrznego co zapobiega zmniejszeniu się strumienia.

Pojawienie się w ramce indukowanego prądu elektrycznego oznacza, że powstała w niej energia elektryczna o mocy P równej

$$\begin{aligned} P &= \mathcal{E} i \\ &= \frac{\mathcal{E}^2}{R} \\ &= \frac{B^2 b^2 v^2}{R} \end{aligned} \quad (28)$$

gdzie R oznacza opór elektryczny ramki. Powstanie tej energii można wytłumaczyć koniecznością wykonania pracy przez siłę zewnętrzną powodującą ruch ramki. Siłę tej przeciwstawia się siła \vec{F}_1 (znowu reguła Lenza), którą pole magnetyczne zewnętrzne oddziałuje na lewy bok ramki, przez który płynie indukowany prąd o natężeniu i . Siły elektrodynamiczne \vec{F}_2 i \vec{F}_3 działające na górny i dolny bok ramki równoważą się i nie wpływają na ruch ramki. Siła \vec{F}_1 zgodnie ze wzorem (12) ma wartość

$$\begin{aligned} F_1 &= B i b \\ &= \frac{B b \mathcal{E}}{R} \end{aligned}$$

Siła, która powoduje ruch ramki równa jest wartościowo sile F_1 ponieważ ramka porusza się ruchem jednostajnym. W czasie Δt wykonuje więc ona pracę równą

$$\begin{aligned} W &= F_1 \Delta x \\ &= \frac{B b \mathcal{E}}{R} \Delta x \end{aligned}$$

Podstawiając wyrażenie (27) na SEM indukcji otrzymujemy

$$W = \frac{B^2 b^2 v}{R} \Delta x$$

Moc, z jaką wykonywana jest praca siły zewnętrznej wprawiającej ramkę w ruch wynosi więc

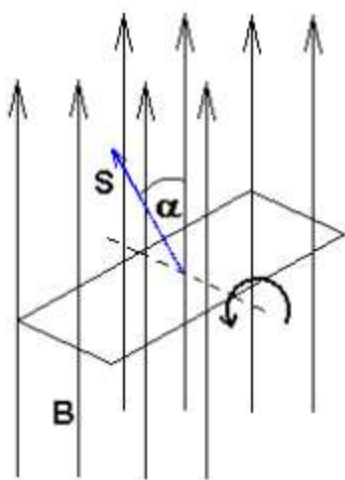
$$\begin{aligned} P &= \frac{W}{\Delta t} \\ &= \frac{B^2 b^2 v}{R} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ &= \frac{B^2 b^2 v^2}{R} \end{aligned}$$

Jak widać jest to wyrażenie identyczne z (28) co znaczy, że praca siły zewnętrznej zamieniła się na energię elektryczną prądu indukowanego w ramce, zresztą zgodnie z uniwersalną zasadą zachowania energii.

Generator prądu przemiennego W kolejnym przykładzie rozpatrujemy ramkę obracającą się ruchem jednostajnym z szybkością kątową ω w jednorodnym polu magnetycznym o indukcji \vec{B} . Pole powierzchni ramki wynosi S . Ramka obraca się wokół osi prostopadłej do linii pola magnetycznego. Kąt α zależy od czasu zgodnie z zależnością

$$\alpha = \omega t + \varphi$$

gdzie φ jest kątem wyznaczającym położenie ramki w chwili początkowej.



W chwili t przedstawionej na rysunku strumień pola przez powierzchnię ramki zgodnie z definicją (24) wynosi

$$\Phi_1 = B S \cos \alpha$$

W chwili $t + \Delta t$ gdy ramka obróciła się o kąt $\Delta\alpha = \omega\Delta t$ strumień wynosi

$$\Phi_2 = B S \cos(\alpha + \omega\Delta t)$$

Zmiana strumienia w czasie Δt jest więc równa

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= B S (\cos(\alpha + \omega\Delta t) - \cos \alpha) \\ &= B S \{ \cos[\omega(t + \Delta t) + \varphi] - \cos(\omega t + \varphi) \} \end{aligned}$$

Zgodnie z prawem Faradaya, indukowana w ramce SEM \mathcal{E} jest równa

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \\ &= -B S \frac{\cos[\omega(t + \Delta t) + \varphi] - \cos(\omega t + \varphi)}{\Delta t} \end{aligned}$$

Ostatnie wyrażenie w granicy gdy Δt zmierza do zera można wyliczyć w oparciu o rachunek różniczkowy. Zgodnie z tym rachunkiem

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\cos[\omega(t + \Delta t) + \varphi] - \cos(\omega t + \varphi)}{\Delta t} = -\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

W ramce indukuje się więc zmienna, zależna od czasu SEM, której wartość zmienia się zgodnie z zależnością

$$\mathcal{E} = B S \omega \sin(\omega t + \varphi) \quad (29)$$

Osiąga ona maksymalną wartość \mathcal{E}_0 równą

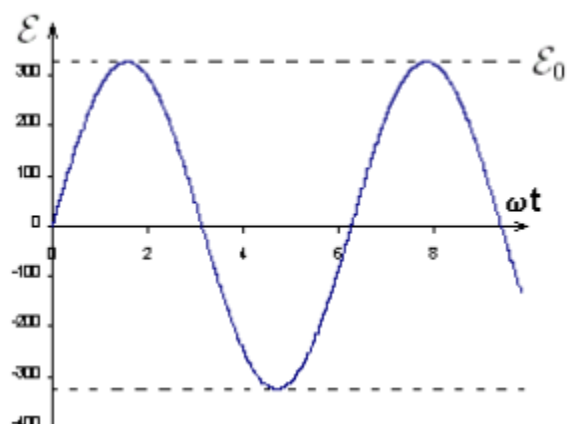
$$\mathcal{E}_0 = B S \omega$$

Taką zależność od czasu ma napięcie zmienne w sieci elektrycznej. Wytwarzane jest ono przez generatory zbudowane z wielu ramek wirujących w polu silnych magnesów z częstotliwością $f = 50 \text{ Hz}$ czyli z szybkością kątową $\omega = 2\pi \cdot 50 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ i doprowadzane sieciami przesyłowymi do naszych domów. Jego zależność od czasu ma postać

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (30)$$

Ze względów praktycznych na codzień posługujemy się pojęciami napięcia skutecznego, prądu skutecznego i mocy skutecznej. Również przyrządy, którymi mierzymy napięcie, czy natężenie prądu zmiennego mierzą wartości skuteczne, czyli wartości uśrednione, ponieważ przy tak dużej częstotliwości zmian jak 50 Hz bezwładność mechaniczna przyrządów nie pozwalałaby mierzyć wartości chwilowych. Przez **wartości skuteczne** rozumie się takie wartości napięcia, natężenia i mocy, które miałby prąd stały, a efekty jego przepływu byłyby takie same jak dla prądu zmiennego.

Wykres zależności czasowej dla zmiennej siły elektromotorycznej w sieci elektrycznej domowej ma postać taką jak na rysunku poniżej ($\varphi = 0$).



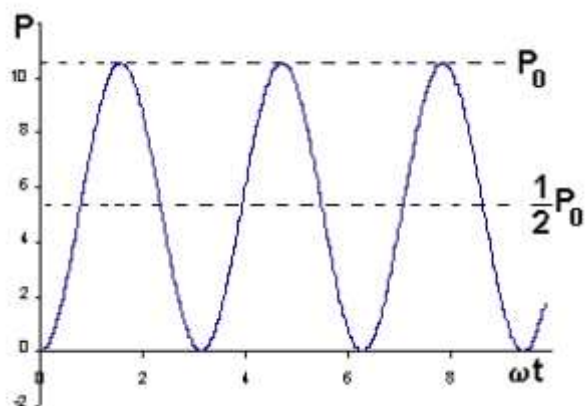
Wiadomo, że moc wydzielana na oporze omowym R przy stałej SEM wyraża się wzorem

$$P = \mathcal{E} I = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \quad (31)$$

Jeżeli przyłożymy do opornika zmienną siłę elektromotoryczną, daną wzorem (29, $\varphi = 0$), wtedy moc wydzielona na oporniku wyrazi się przez

$$P = \frac{(\mathcal{E}_0 \sin \omega t)^2}{R} = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R} (\sin \omega t)^2 \quad (32)$$

Moc jest zmienna, jej wartość chwilowa zmienia się z częstotliwością 2 razy większą niż częstotliwość zmian SEM. Poniżej na rysunku przedstawiono wykres zależności czasowej mocy wydzielanej na oporniku $R = 10k\Omega$ dla napięcia takiego jak w sieci elektrycznej domowej. P_0 oznacza maksymalną wartość chwilową mocy.



Podczas gdy wartość średnia SEM wynosi zero (wartościom dodatnim odpowiadają symetryczne wartości ujemne) wartość średnia mocy, a taka jest tylko istotna z punktu widzenia praktycznego, jest różna od zera i wynosi

$$P_{sr} = \frac{1}{2}P_0 = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{E}_0^2}{R} = \frac{\left(\frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}}\right)^2}{R}$$

Aby otrzymać takie wyrażenie, jak dla stałej SEM (wzór 31) oznaczmy wyraz w nawiasie w liczniku ostatniego wzoru przez \mathcal{E}_{sk} wtedy otrzymamy wyrażenie na **moc średnią czyli skuteczną** w oczekiwanej postaci

$$P_{sr} = P_{sk} = \frac{\mathcal{E}_{sk}^2}{R}$$

gdzie

$$\mathcal{E}_{sk} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}} \quad (33)$$

jest z definicji **SEM skuteczną**. W identyczny sposób definiuje się napięcie skuteczne i natężenie skuteczne.

5.3 Indukcyjność cewki

Jeżeli cewka znajduje się w zewnętrznym zmiennym polu magnetycznym, to zgodnie z prawem Faradaya indukuje się w niej siła elektromotoryczna. Zjawisko to nazywa się zjawiskiem indukcji elektromagnetycznej. Wystarczy jednak, że przez cewkę płynie zmienny prąd, wtedy ona sama wytwarza zmienne pole magnetyczne, które indukuje w cewce SEM. Nie ma znaczenia skąd pochodzi pole magnetyczne, istotne jest tylko by było to pole zmienne. W tym drugim przypadku indukowaną SEM nazywamy **siłą elektromotoryczną samoindukcji**. Podlega ona tak samo prawu Faradaya jak każda inna indukowana przez zmienne pole magnetyczna siła elektromotoryczna.

Przez każdy zwój cewki przenika taki sam strumień Φ_B . Jeżeli cewka składa się z N zwojów, wtedy całkowity strumień przechodzący przez cewkę wynosi $\Phi = N \Phi_B$ i prawo Faradaya dla cewki przyjmuje postać

$$\mathcal{E} = - \frac{\Delta(N \Phi_B)}{\Delta t} \quad (34)$$

Jeżeli cewka nie posiada żadnego rdzenia z materiału magnetycznego, i znajduje się w dużej odległości od wszelkich materiałów magnetycznych, wtedy

całkowity strumień $N \Phi_B$ jest wprost proporcjonalny do natężenia prądu I płynącego przez cewkę.

$$N \Phi_B = L I \quad (35)$$

gdzie współczynnik proporcjonalności L nazywa się **indukcyjnością cewki**. Na podstawie wzoru (34) można napisać

$$\mathcal{E} = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

Stąd otrzymujemy równanie definiujące indukcyjność cewki

$$L = - \frac{\mathcal{E}}{\frac{\Delta I}{\Delta t}} \quad (36)$$

Jednostką indukcyjności otrzymaną na podstawie tego równania jest **1 henr** (1 H)

$$1H = \frac{1V \cdot s}{A} \quad (37)$$

W dość prosty sposób można policzyć indukcyjność dla kilku prostych przypadków. Obliczymy indukcyjność dla ściśle nawiniętego, bardzo długiego solenoidu, w otoczeniu którego nie ma materiałów magnetycznych. Niech pole powierzchni przekroju poprzecznego solenoidu wynosi A , długość solenoidu wynosi l , liczba zwojów na jednostkę długości solenoidu jest równa n . Wtedy całkowita liczba zwojów solenoidu wynosi $N = n l$, a całkowity strumień przechodzący przez solenoid

$$N \Phi_B = n l \Phi_B = n l B A$$

Indukcja magnetyczna B wewnątrz solenoidu dana jest wzorem (8). Podstawiając to do naszego ostatniego równania otrzymujemy

$$N \Phi_B = \mu_0 n^2 l A I$$

Na podstawie (35) mamy

$$L I = \mu_0 n^2 l A I$$

a stąd otrzymujemy indukcyjność solenoidu

$$L = \mu_0 n^2 l A \quad (38)$$

Indukcyjność solenoidu zależy jak widać tylko od jego geometrii: od objętości solenoidu $V = l A$ i liczby zwojów na jednostkę długości.

Jeżeli źródłem zmiennego pola magnetycznego dla danej cewki jest prąd płynący w innej cewce znajdującej się obok, wtedy mówimy o **indukcji wzajemnej** dla podkreślenia wzajemnego oddziaływania cewek na siebie i dla odróżnienia od samoindukcji. Nie różni się to jednak od omawianego wyżej zjawiska samoindukcji.

Ważnym zastosowaniem tego zjawiska jest **transformator**. Urządzenie to składa się z dwóch cewek nawiniętych na wspólny rdzeń ze stali miękkiej. Rdzeń jest zamknięty, tak że cały strumień magnetyczny wytwarzany przez jedną cewkę przechodzi przez drugą cewkę. SEM indukcji przypadająca na jeden zwój dla obydwu cewek jest taka sama.

Jeżeli N_1 oznacza ilość zwojów cewki pierwszej, a N_2 ilość zwojów cewki drugiej wtedy na podstawie wzoru (34) możemy dla cewki pierwszej napisać

$$\frac{\mathcal{E}_1}{N_1} = \frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}$$

a dla drugiej

$$\frac{\mathcal{E}_2}{N_2} = \frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}$$

Dla wartości skutecznych możemy więc napisać

$$\frac{\mathcal{E}_{1sk}}{N_1} = \frac{\mathcal{E}_{2sk}}{N_2}$$

lub w postaci

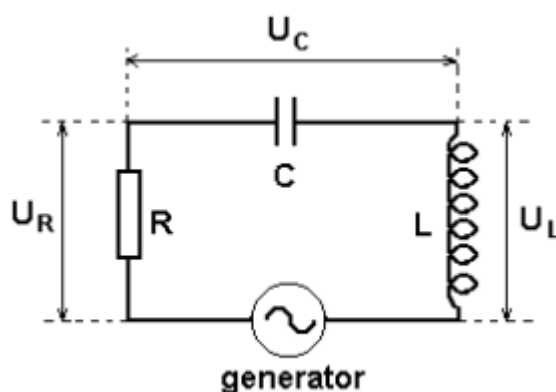
$$\mathcal{E}_{2sk} = \mathcal{E}_{1sk} \frac{N_2}{N_1} \quad (39)$$

Ostatnie równanie oznacza, że jeżeli do cewki pierwszej przyłożone zostanie napięcie zmienne, a cewka druga będzie miała mniej zwojów niż pierwsza ($\frac{N_2}{N_1} < 1$) wtedy w drugiej cewce napięcie indukowane będzie niższe. Mówimy wtedy, że **transformator obniża napięcie**. Gdy w cewce drugiej będzie więcej zwojów niż w pierwszej ($\frac{N_2}{N_1} > 1$) transformator będzie **podwyższał napięcie**.

5.4 Obwody RLC

Obwód zawierający opór omowy o oporze R , cewkę indukcyjną o indukcyjności L i kondensator o pojemności C nazywa się obwodem RLC. Na oporze omowym energia elektryczna zamienia się w ciepło. Cewka powoduje

powstanie dodatkowej indukowanej SEM, a kondensator ładuje się i rozładowuje na przemian powodując przesunięcie w fazie natężenia prądu w stosunku do napięcia w obwodzie. Obwód zasilany jest napięciem zmiennym. Prąd płynący w takim obwodzie na skutek zjawiska indukcji elektromagnetycznej i obecności kondensatora zależy od częstotliwości zmian napięcia, indukcyjności cewki, pojemności kondensatora i oczywiście od oporu R .



Generator w tym obwodzie wytwarza zmienną siłę elektromotoryczną daną zależnością zgodną ze wzorem (30), przy czym przyjęliśmy, że faza φ jest równa 0.

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t \quad (40)$$

gdzie $\omega = 2\pi\nu$ jest tak zwaną **częstością kołową** lub **kątową**, a ν jest częstotliwością mierzoną w hercach.

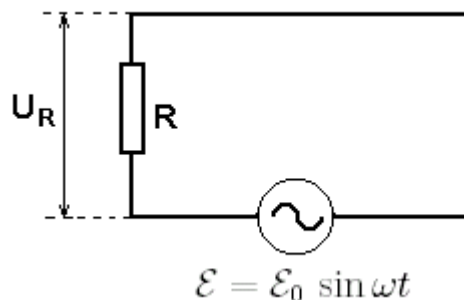
Natężenie prądu płynącego we wszystkich odcinkach obwodu przedstawionego na powyższym rysunku jest takie samo, a jego zależność od czasu jest taka sama jak zależność siły elektromotorycznej jedynie z różnicą co do fazy, czyli

$$I = I_0 \sin(\omega t - \varphi) \quad (41)$$

gdzie I_0 jest amplitudą natężenia prądu.

Aby znaleźć zależność I_0 od ω , \mathcal{E} , R , L , C rozważymy każdy z elementów obwodu oddzielnie.

Obwód opornościowy



Z II prawa Kirchhoffa mamy

$$U_R = \mathcal{E}_0 \sin \omega t \quad (42)$$

Natomiast z definicji oporu

$$U_R = I_R R \quad (43)$$

Z obydwu równań otrzymujemy

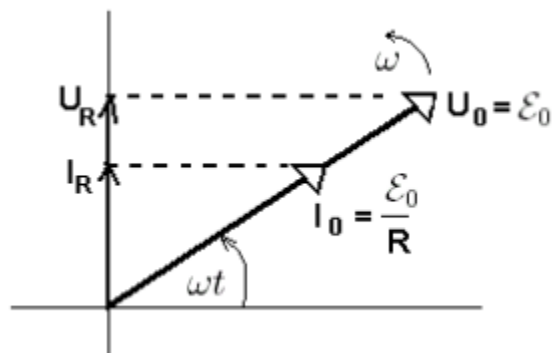
$$\begin{aligned} I_R &= \frac{U_R}{R} \\ &= \frac{\mathcal{E}_0}{R} \sin \omega t \end{aligned} \quad (44)$$

Stąd i porównując(41) widzimy, że

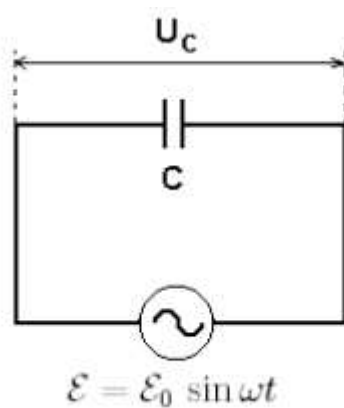
$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \quad (45)$$

a prąd I jest w tej samej fazie co napięcie U (napięcie i natężenie prądu osiągnają maksymalne wartości w tych samych chwilach).

Powyższe związki przedstawia się często na tak zwanych **diagramach strzałkowych**. Dwie strzałki obracają się wokół wspólnego początku z częstotliwością kątową ω . Jedna strzałka odpowiada napięciu, a druga natężeniu prądu. Długość każdej z nich jest równa amplitudzie odpowiednio napięcia U_0 i natężenia I_0 . Rzut każdej ze strzałek na oś pionową przedstawia wartości chwilowe tych wielkości dane równaniami 42 i 44. Dla obwodu opornościowego diagram strzałkowy będzie więc wyglądał tak jak na poniższym rysunku.



Obwód pojemnościowy



Z II prawa Kirchhoffa mamy

$$U_C = \epsilon_0 \sin \omega t \quad (46)$$

a z definicji pojemności

$$U_C = \frac{q}{C} \quad (47)$$

Z obydwu zależności otrzymujemy

$$q = C \epsilon_0 \sin \omega t \quad (48)$$

Korzystając z ostatniego równania obliczamy natężenie prądu z definicji jako

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

(gdy Δt zmierza do zera wtedy I staje się równie pochodnej ładunku q po czasie: $I = \frac{dq}{dt}$)

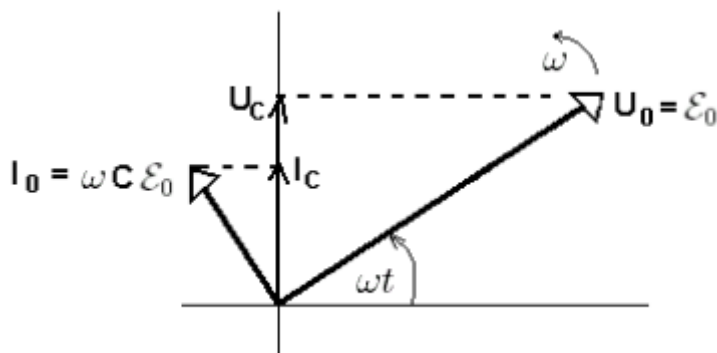
$$\begin{aligned} I_C &= \frac{dq}{dt} \\ &= \omega C \mathcal{E}_0 \cos \omega t \\ &= \omega C \mathcal{E}_0 \sin(\omega t - 90^\circ) \end{aligned} \quad (49)$$

Porównując równanie (49) z (41) widzimy, że

$$I_0 = \omega C \mathcal{E}_0 \quad (50)$$

a różnica faz φ wynosi 90° , czyli natężenie prądu wyprzedza w fazie napięcie o jedną czwartą okresu.

Na diagramie strzałkowym wygląda to następująco:



Na podstawie równania (50) definiuje się tak zwaną **oporność pojemnościową** (zwaną inaczej **reaktancją pojemnościową**), która odpowiada oporowi w obwodzie opornościowym. Ponieważ maksymalna wartość napięcia na kondensatorze w obwodzie pojemnościowym jest równa maksymalnej wartości siły elektromotorycznej więc równanie (50) można przepisać w postaci

$$I_0 = \omega C U_0 \quad (51)$$

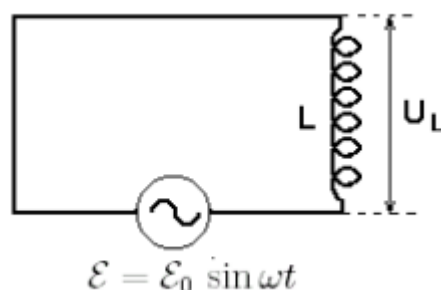
i podobnie jak się definiuje opór zdefiniować opór pojemnościowy X_C

$$X_C = \frac{U_0}{I_0}$$

czyli z (51)

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (52)$$

Obwód indukcyjny



Na podstawie II prawa Kirchhoffa można napisać

$$U_L = \mathcal{E}_0 \sin \omega t \quad (53)$$

a z definicji indukcyjności

$$U_L = L \frac{dI}{dt} \quad (54)$$

Z obydwu zależności otrzymujemy

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \sin \omega t \quad (55)$$

Jeżeli pochodna natężenia prądu jest funkcją sinus to samo natężenie musi być funkcją kosinus, czyli natężenie prądu wyraża się wzorem

$$I = -\frac{\mathcal{E}_0}{\omega L} \cos \omega t \quad (56)$$

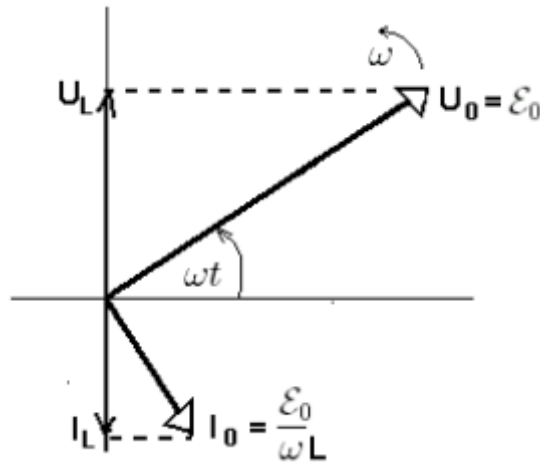
Pojawił się tu znak minus ponieważ pochodna funkcji kosinus jest równa minus sinus. Można to też zapisać w postaci

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L} \sin(\omega t + 90^\circ) \quad (57)$$

Porównując ostatni wzór z (41) widać, że maksymalna wartość natężenia prądu wynosi

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega L} \quad (58)$$

i jest opóźniona w fazie względem napięcia o 90° . Na diagramie strzałkowym przedstawia się to jak na poniższym rysunku.



Podobnie jak poprzednio ostatnia zależność pozwoli nam zdefiniować odpowiednik oporu dla cewki, czyli tak zwaną **oporność indukcyjną** lub inaczej **reaktancję indukcyjną** X_L . Ponieważ maksymalna wartość napięcia $U_0 = \mathcal{E}_0$ więc na podstawie ostatniej równości możemy napisać

$$I_0 = \frac{U_0}{\omega L}$$

a stąd

$$X_L = \frac{U_0}{I_0} = \omega L \quad (59)$$

Pojedynczy obwód RLC W obwodzie, w którym znajdują się wszystkie elementy, czyli w obwodzie RLC natężenie prądu jest jednakowe w każdym fragmencie obwodu i dane równaniem (41), zaś obwód zasilany jest z generatora o sile elektromotorycznej danej zależnością (40). Obie te wielkości różnią się fazą φ , czyli osiągają maksymalne wartości \mathcal{E}_0 oraz I_0 w różnych chwilach czasu.

Maksymalna wartość natężenia prądu I_0 zależy od całkowitego oporu Z zwanego w obwodzie RLC **zawadą** lub inaczej **impedancją** obwodu, zdefiniowanego tak jak dla obwodu opornościowego (45) lub dla obwodu prądu stałego (prawo Ohma), czyli

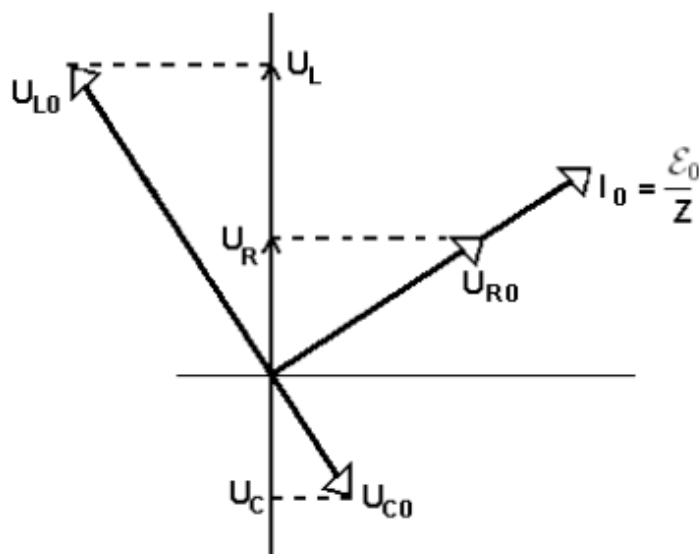
$$Z = \frac{\mathcal{E}_0}{I_0} \quad (60)$$

W obwodzie obowiązuje oczywiście w każdej chwili t prawo Kirchhoffa

$$\mathcal{E} = U_R + U_C + U_L$$

jednak maksymalna wartość \mathcal{E}_0 nie jest po prostu sumą maksymalnych wartości U_{R0} , U_{C0} i U_{L0} gdyż poszczególne wyrazy w powyższym równaniu nie są w tej samej fazie.

Aby znaleźć maksymalną wartość \mathcal{E}_0 można się posłużyć diagramem strzałkowym dla całego obwodu RLC.



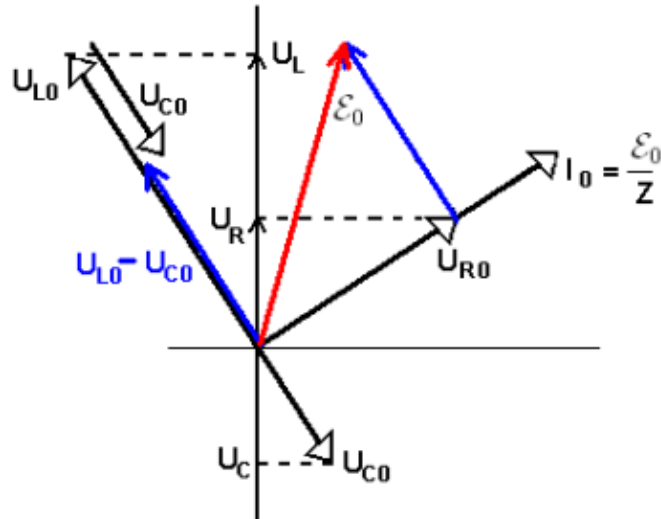
Maksymalne wartości napięć na elementach R, L i C obwodu obliczymy w oparciu o wzory (45, 51, 59)

$$U_{R0} = I_0 R$$

$$U_{C0} = I_0 \frac{1}{\omega C}$$

$$U_{L0} = I_0 \omega L$$

Maksymalna wartość \mathcal{E}_0 jest sumą wektorową maksymalnych wartości napięć U_{R0} , U_{C0} , U_{L0} , którą można obliczyć z odpowiedniego trójkąta prostokątnego przedstawionego na poniższym rysunku



Najpierw obliczamy sumę wektorową maksymalnych napięć U_{L0} , U_{C0} , która jest równa

$$U_{L0} - U_{C0} = I_0\omega L - I_0\frac{1}{\omega C} = I_0\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

Ponieważ

$$\mathcal{E}_0^2 = (I_0R)^2 + \left(I_0\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right)^2$$

więc

$$\mathcal{E}_0 = I_0\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Z ostatniego równania otrzymujemy maksymalną wartość natężenia prądu w obwodzie

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (61)$$

a z definicji (60) zawady obwodu wzór na jej wartość

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (62)$$

Widać z niego, że impedancja (czyli opór) obwodu RLC jest najmniejsza wtedy gdy

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \quad (63)$$

ponieważ wtedy drugi składnik zawady znika i pozostaje tylko opór omowy

$$Z = R$$

Obliczmy ze wzoru (63) częstotliwość ω_0 , dla której spełniony jest warunek równości reaktancji pojemnościowej i indukcyjnej wyrażony tym wzorem

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

czyli

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (64)$$

Dla obwodu zawierającego daną indukcyjność i pojemność jest to tak zwana **częstość własna** obwodu. Dla częstości siły elektromotorycznej zasilającej obwód RLC równej częstotliwości własnej obwodu prąd skuteczny płynący przez ten obwód jest największy. Mówimy wtedy o zjawisku **rezonansu**.

Jeżeli założymy, że opór omowy obwodu jest znikomo mały ($R = 0$), otrzymujemy tak zwany **obwód drgający LC**. Po naładowaniu kondensatora i odłączeniu obwodu od źródła zasilania w obwodzie będą zachodziły nietłumione drgania elektryczne podobne do nietłumionych drgań mechanicznych. Częstotliwość tych drgań będzie dana zależnością wynikającą z (64). Ponieważ częstość kołowa związana jest z częstotliwością drgań wzorem

$$\omega = 2\pi\nu$$

więc

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (65)$$

Podłączając do tego obwodu odpowiednią antenę otrzymamy nadajnik fal elektromagnetycznych o tej właśnie częstotliwości.

6 Równania Maxwella i fale elektromagnetyczne

Z mikroskopowego punktu widzenia zmienny strumień wektora indukcji \vec{B} indukuje w punktach gdzie znajduje się przewodnik pole elektryczne \vec{E} , które działa na ładunki elektryczne siłami $q\vec{E}$ i jest źródłem siły elektromotorycznej. Praca sił $q\vec{E}$ przy przemieszczeniu ładunku q na odcinku $\vec{\Delta l}$ jest równa energii $q\mathcal{E}$ jaką uzyskuje ładunek podczas pokonywania różnicy

potencjałów \mathcal{E} pomiędzy końcami małego odcinka $\vec{\Delta l}$, co można zapisać równaniem

$$q \vec{E} \circ \vec{\Delta l} = q \mathcal{E}$$

lub po skróceniu przez q

$$\vec{E} \circ \vec{\Delta l} = \mathcal{E}$$

Jeżeli zsumujemy wszystkie przyczynki wzdłuż całego obwodu (ponieważ sumujemy nieskończenie małe odcinki więc znak sumy zastępowany jest znakiem całki, ponadto sumujemy po obwodzie zamkniętym dlatego znak całki zawiera koło) i połączymy powyższe równanie z prawem Faradaya otrzymamy jedno z czterech równań Maxwella:

$$\oint \vec{E} \circ \vec{dl} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (66)$$

Równanie to oznacza, że **zmienne pole magnetyczne indukuje zmienne pole elektryczne**.

Drugie z równań Maxwella to **prawo Gaussa dla elektrostatyki**:

$$\oint \vec{E} \circ \vec{ds} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (67)$$

Oznacza ono, że strumień pola elektrostatycznego przez powierzchnię zamkniętą jest równy ładunkowi elektrycznemu obejmowanemu przez tę powierzchnię (z dokładnością do czynnika równego przenikalności dielektrycznej próżni ϵ_0).

Trzecie z równań Maxwella to **prawo Gaussa dla magnetyzmu**:

$$\oint \vec{B} \circ \vec{ds} = 0 \quad (68)$$

Oznacza ono, że strumień pola magnetycznego przez powierzchnię zamkniętą jest równy 0, co można interpretować jako odzwierciedlenie faktu, że nie stwierdza się istnienia odosobnionych biegunów magnetycznych.

Dołączając do powyższych trzech równań **prawo Ampere'a**

$$\oint \vec{B} \circ \vec{dl} = \mu_0 I \quad (69)$$

które jest odbiciem faktu, że wokół przewodnika z prądem elektrycznym powstaje pole magnetyczne \vec{B} otrzymujemy komplet równań elektromagnetyzmu: cztery równania Maxwella.

Równania te są słuszne przy założeniu nieobecności materiałów dielektrycznych i magnetycznych. Ponadto ostatnie równanie (prawo Ampere'a) obejmuje tylko przypadek prądów stałych w nieobecności zmiennych pól elektrycznych. Jeżeli będziemy chcieli takie uwzględnić musimy dołożyć w prawie Ampere'a dodatkowy wyraz:

$$\oint \vec{B} \circ \vec{dl} = \mu_0 \left(\varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} + I \right) = \mu_0 (I_p + I) \quad (70)$$

Ten dodatkowy wyraz:

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \mu_0 I_p$$

ma wymiar natężenia prądu elektrycznego i bywa nazywany **prądem przesunięcia** I_p . Oznacza to, że **zmiennie pole elektryczne**, a nie tylko prąd elektryczny w przewodniku (jak to jest w prawie Ampere'a 69) również **powoduje powstanie zmiennego pola magnetycznego wokół linii pola elektrycznego**, a temu polu elektrycznemu można przypisać coś co nazywa się prądem przesunięcia.

Z równań Maxwella wynika istnienie fal elektromagnetycznych. Można otrzymać na podstawie tych równań, że fale elektromagnetyczne w próżni rozchodzą się z szybkością równą

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \quad (71)$$

co po podstawieniu wartości liczbowych przenikalności dielektrycznej i magnetycznej próżni daje wartość

$$c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

która jest równa prędkości światła w próżni.

Należy tu podkreślić dwie sprawy: po pierwsze wartość ta została otrzymana na podstawie równań, w których przenikalność magnetyczna próżni została przyjęta w drodze konwencji, a po drugie wartość ta nie zależy od długości fali (z definicji długości fali: $\lambda \nu = v$), z czego wynika, że wszystkie fale elektromagnetyczne w próżni poruszają się z jednakową szybkością w tym również światło.