KINEMATYKA
czyli opis ruchu

Marian Talar

1 października 2006

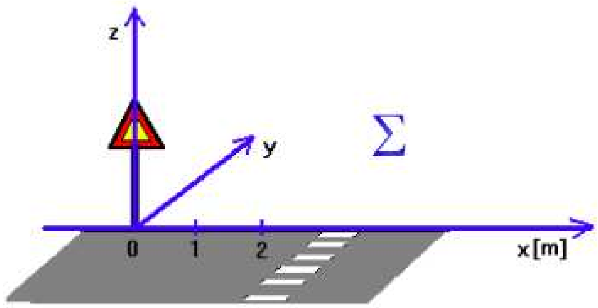
1 Podstawowe pojęcia

Kinematyka jest działem fizyki, który zajmuje się tylko opisem ruchu ciał. W ruchu postępowym ciało zastępuje się odpowiadającym mu **punktem materialnym**, czyli punktem, któremu przypisuje się masę równą masie danego ciała. Opis ruchu polega na podaniu zależności **położenia** ciała od czasu $\vec{r}(t)$. W celu ustalenia położenia wybiera się **układ odniesienia** i wiąże się z nim **układ współrzędnych**. Najczęściej jest to **układ kartezjański**.

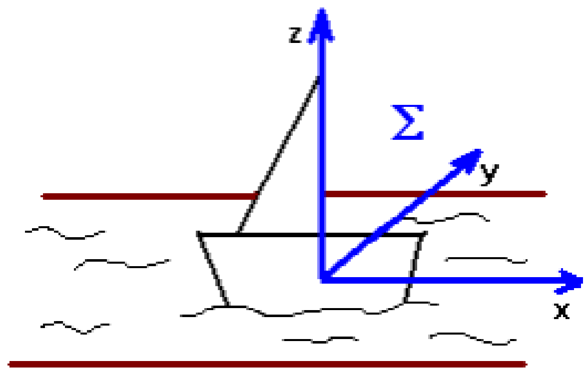
1.1 Układ odniesienia

Układ odniesienia służy do określenia położenia ciała (punktu materialnego). Jest to wybrane przez nas ciało lub układ ciał, z którym wiążemy układ współrzędnych (najczęściej układ kartezjański).

Przykłady układów odniesienia:



Układem odniesienia Σ przedstawionym na powyższej ilustracji jest szosa. Początek układu wybrano w miejscu znaku drogowego.



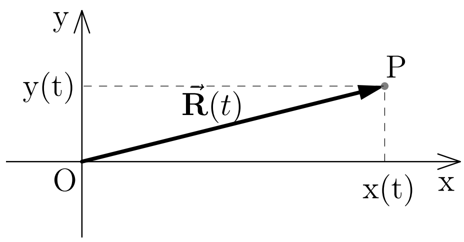
W powyższym przykładzie za układ odniesienia $\sum$ służy łódka. Jeżeli łódka porusza się względem brzegu rzeki to względem brzegu układ $\sum$ jest w ruchu.

Opisując ruchy ciał w układzie $\sum$ musimy pamiętać, że względem tego układu brzeg rzeki porusza się.

1.2 Położenie

Położeniem punktu materialnego P w wybranym układzie odniesienia nazywa się wektor wodzący $\vec{\mathbf{R}}$ o początku w początku układu współrzędnych O i końcu w punkcie P. W układzie kartezjańskim w przypadku dwuwymiarowym i w danej chwili czasu t

$$\vec{\mathbf{R}}(t) = [x(t), y(t)]$$

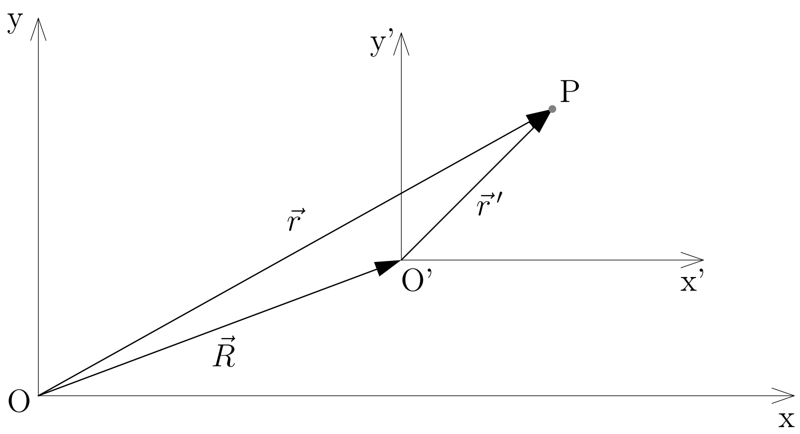


Jeżeli chcielibyśmy określić położenie ciała w przestrzeni należałoby podać jeszcze trzecią współrzędną z(t). Gdy ruch odbywa się wzdłuż prostej wtedy dla określenia położenia ciała wystarcza tylko jedna współrzędna x(t). Niepotrzebny jest wówczas zapis położenia za pomocą wektora $\vec{\mathbf{R}}(t)$ gdyż podanie współrzędnej punktu na osi liczbowej jednoznacznie określa położenie tego punktu na osi.

1.3 Transformacja współrzędnych

Ponieważ wybór układu odniesienia i związanego z nim układu współrzędnych jest dowolny, przy jego wyborze kierujemy się przede wszystkim prostotą opisu ruchu. Czasami zachodzi potrzeba przejścia od opisu położenia w jednym układzie do opisu położenia w innym układzie współrzędnych. Przejście to nazywa się **transformacją współrzędnych**.

Niech będą dane dwa układy współrzędnych XOY (oznaczmy go jako $\sum$) i X'O'Y' ($\sum'$). W danej chwili są one tak położone względem siebie, że położenie początku $\sum'$ względem układu $\sum$ dane jest wektorem $\vec{R}$, natomiast położenie punktu materialnego P względem układu $\sum$ dane jest wektorem $\vec{r}$.



Wtedy położenie $\vec{r}'$ punktu P w układzie $\sum'$ można wyrazić za pomocą położenia $\vec{r}$ w układzie $\sum$ poprzez

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R} \tag{1}$$

lub

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}' \tag{2}$$

1.4 Ruch i spoczynek

Ruch jest zjawiskiem polegającym na zmianie położenia ciała wraz z upływem czasu w wybranym układzie odniesienia. Jeżeli względem wybranego układu odniesienia ciało nie zmienia położenia wraz z upływem czasu, to mówimy że ciało to **spoczywa**.

1.5 Opis ruchu

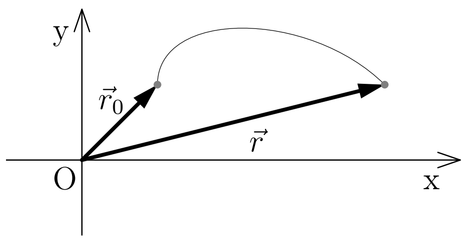
Opis ruchu w kinematyce polega na podaniu zależności położenia ciała od czasu. Zależność tę podaje się najczęściej w postaci funkcyjnej. Dla ruchu odbywającego się wzdłuż prostej jest to zależność współrzędnej x od czasu, czyli x(t). Dla ruchu na płaszczyźnie będzie to zależność wektora położenia od czasu czyli $\vec{R}(t) = [x(t), y(t)]$ wymagająca podania dwóch funkcji: x(t) i y(t). W przypadku ruchu w przestrzeni musimy podać trzy funkcje czasu, po jednej funkcji dla każdej współrzędnej.
Przykładowo:
a) x(t)=3+2t ruch wzdłuż prostej
b) $\vec{R}(t) = [2t^2, 5 - t]$ ruch na płaszczyźnie.
W przykładzie b mamy:
x(t)=$2t^2$
y(t)=5-t

1.6 Względność ruchu

Względność ruchu polega na tym, że opis ruchu danego ciała zależy od wyboru układu odniesienia. Na przykład dane ciało w jednym układzie odniesienia jest w spoczynku, a względem innego porusza się z pewną prędkością (kierowca w samochodzie jadącym szosą znajduje się w spoczynku w układzie związanym z samochodem, którym kieruje, a w układzie związanym z szosą ten sam kierowca jest w ruchu).

1.7 Tor ruchu

Wszystkie położenia ciała w przedziale czasu $\langle t_0, t\rangle$ tworzą krzywą, wzdłuż której porusza się ciało. Krzywą tę nazywa się **torem ruchu** lub **trajektorią**.

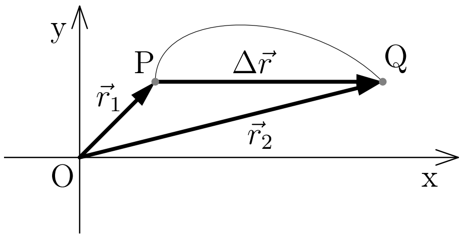


Na powyższym rysunku przedstawiono tor ruchu ciała, gdzie $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$ jest **położeniem początkowym**, a $\vec{r} = \vec{r}(t)$ jest **położeniem końcowym**.

1.8 Droga

Długość toru, który ciało przebyło w pewnym czasie nazywa się **drogą**.
!!! Ponieważ droga jest zdefiniowana jako długość pewnej linii więc jest zawsze wielkością nieujemną.

1.9 Przemieszczenie ciała



Przemieszczeniem ciała nazywa się wektor $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ o początku w punkcie P będącym położeniem ciała we wcześniejszej chwili t_1 i końcu w punkcie Q, będącym położeniem ciała w późniejszej chwili t_2.

2 Prędkość i przyspieszenie: dwie podstawowe charakterystyki ruchu

2.1 Prędkość średnia

Prędkość średnia z definicji jest równa

$$\vec{v}_{sr} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \tag{3}$$

gdzie $\Delta\vec{r}$ jest przemieszczeniem jakiego doznało ciało w ciągu czasu równego Δt. Czas Δt może być dowolnie długi. Prędkość średnia jest wektorem, którego kierunek pokrywa się z wektorem przemieszczenia, którego ciało doznało w czasie Δt. Jeżeli wektor przemieszczenia równy jest 0 to również prędkość średnia jest wektorem zerowym.

2.2 Szybkość średnia

Szybkością średnią z definicji nazywamy

$$v_{sr} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{4}$$

gdzie Δs oznacza drogę, czyli długość toru, którą ciało przebyło w czasie Δt. Szybkość średnia nie jest na ogół równa wartości wektora prędkości średniej.

2.3 Prędkość i szybkość chwilowa

Prędkością chwilową $\vec{v}$ w chwili t, lub krótko prędkością ciała w chwili t nazywa się graniczną wartość prędkości średniej liczonej dla nieskończenie krótkiego czasu Δt w przedziale od t *do* $t + \Delta t$:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{5}$$

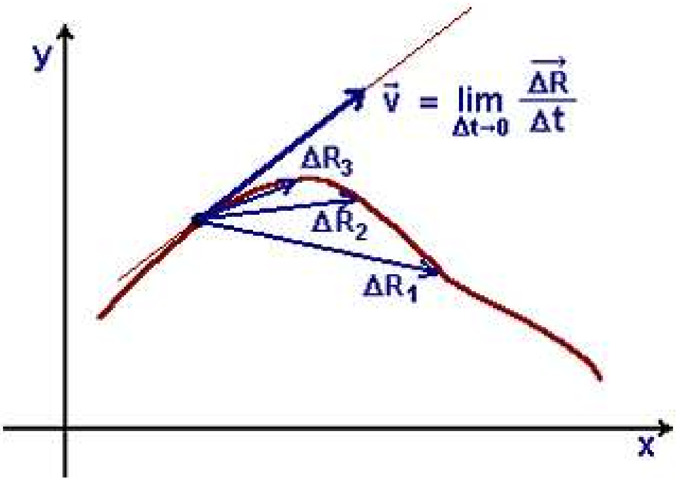
Wyrażenie

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

czytamy:
granica przy Δt zmierzającym do zera z ilorazu przemieszczenia $\Delta \vec{r}$ przez Δt (lim z łac. limes oznacza granicę). Należy to rozumieć w ten sposób, że bierzemy coraz krótsze przemieszczenia ciała w kolejnych coraz krótszych przedziałach czasu i obliczamy ich iloraz. Iloraz ten, gdy zbliżamy się z przedziałem czasu do zera, ustala się i graniczną wartość definiujemy jako prędkość chwilową w chwili t. Wyrażenie

$$\frac{d\vec{r}}{dt}$$

jest innym oznaczeniem tego samego przejścia granicznego.
Prędkość chwilowa jest wektorem, którego kierunek, wartość i zwrot zależą od czasu. W każdej chwili czasu t wektor ten jest styczny do toru ruchu w punkcie, w którym znajduje się ciało w tej chwili. Definicję prędkości chwilowej i procedurę jej obliczania ilustruje poniższy rysunek.



Wartość wektora prędkości chwilowej nazywa się **szybkością chwilową**. Szybkość chwilowa jest dana zależnością

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \tag{6}$$

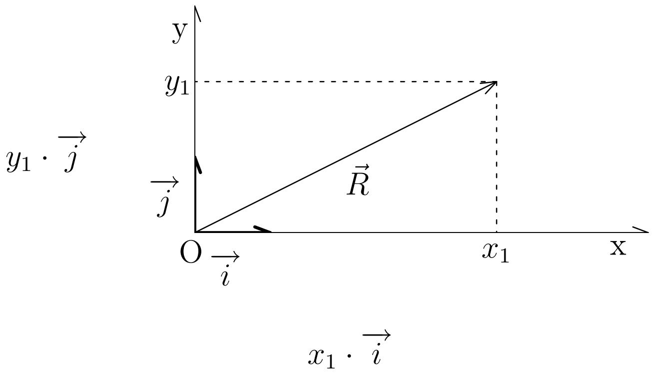
Przykład obliczania prędkości chwilowej w ruchu na płaszczyźnie

---

`Matematyczna dygresja`

Jeżeli wektor $\overrightarrow{R} = [x_1, y_1]$, a wektory $\overrightarrow{i}$ oraz $\overrightarrow{j}$ są wektorami jednostkowymi dla osi odpowiednio Ox i Oy to wektor $\overrightarrow{R}$ można zapisać w postaci sumy dwóch wektorów:

$$\overrightarrow{R} = x_1 \cdot \overrightarrow{i} + y_1 \cdot \overrightarrow{j}$$



Wektory $x_1 \cdot \overrightarrow{i}$ oraz $y_1 \cdot \overrightarrow{j}$ nazywa się **składowymi wektora** $\overrightarrow{R}$.

Dany jest opis ruchu ciała poruszającego się w płaszczyźnie względem pewnego układu odniesienia XOY zawartego w tej płaszczyźnie, czyli zależność położenia od czasu:

$$\overrightarrow{R(t)} = [x(t), y(t)] \tag{7}$$

Wektor położenia można rozłożyć na składowe i zapisać w postaci

$$\overrightarrow{R(t)} = x(t) \cdot \overrightarrow{i} + y(t) \cdot \overrightarrow{j} \tag{8}$$

Ponieważ wektory $\overrightarrow{i}$ oraz $\overrightarrow{j}$ są stałymi wektorami jednostkowymi, więc nie zależą od czasu. Na podstawie wzoru (5) definiującego prędkość możemy napisać, że

$$\overrightarrow{v(t)} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{R(t)}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} \cdot \overrightarrow{i} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y(t)}{\Delta t} \cdot \overrightarrow{j} \tag{9}$$

Ponieważ prędkość jest wektorem więc podobnie jak wektor położenia $\overrightarrow{R(t)}$ możemy ją rozłożyć na składowe i napisać

$$\overrightarrow{v(t)} = v_x \cdot \overrightarrow{i} + v_y \cdot \overrightarrow{j} \tag{10}$$

gdzie v_x i v_y są składowymi prędkości odpowiednio w kierunku osi Ox i osi Oy. Porównując wzory (9) i (10) widzimy że składowe prędkości otrzymujemy z obliczenia granic dla każdej składowej wektora położenia oddzielnie:

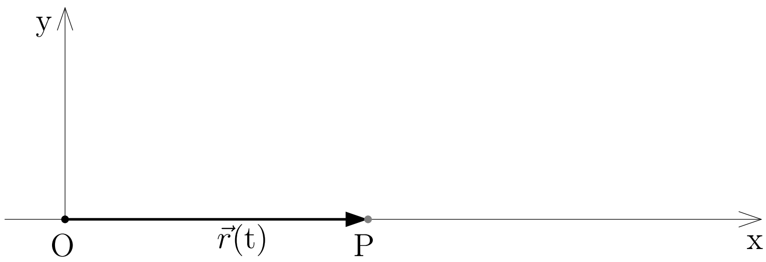
$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x(t)}{\Delta t} \tag{11}$$

$$v_y = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y(t)}{\Delta t} \tag{12}$$

3 Podział ruchów

Ruchy ciał dzieli się pod kątem dwóch kryteriów: kształt toru i szybkość. Ze względu na kształt toru ruchy dzieli się na dwie kategorie: ruchy **prostoliniowe** i **krzywoliniowe**. Wśród ruchów krzywoliniowych na szczególną uwagę zasługuje ruch po okręgu. Ze względu na szybkość można wyróżnić ruchy: **jednostajne**, **jednostajnie zmienne** i ruchy **niejednostajnie zmienne**. Obydwa podziały mogą się wzajemnie krzyżować, to znaczy że ruch prostoliniowy może być ruchem jednostajnym lub jednostajnie zmiennym, czy niejednostajnie zmiennym.

Ruch prostoliniowy jest szczególnie łatwy do opisu ponieważ położenie ciała daje się opisać za pomocą jednej tylko współrzędnej x(t), jeżeli układ współrzędnych wybierzemy tak, aby oś OX pokrywała się z torem ruchu.



Wektor położenia $\vec{r}(t) = [x(t), 0]$, więc zamiast $\vec{r}(t)$ wystarczy do opisu ruchu podać zależność współrzędnej x od czasu, t.j. x(t).

3.1 Ruch jednostajny prostoliniowy

Ruch jednostajny prostoliniowy jest to taki ruch, w którym w równych odstępach czasu ciało pokonuje jednakowe drogi oraz torem jego ruchu jest linia prosta.

Definicja powyższa oznacza, że droga pokonywana przez ciało jest wprost proporcjonalna do czasu i

$$\Delta s = |x(t + \Delta t) - x(t)| = \Delta x \tag{13}$$

Tak więc droga w ruchu jednostajnym prostoliniowym przebyta w czasie Δt jest równa wartości bezwzględnej z różnicy pomiędzy współrzędnymi położenia x w chwilach odpowiednio $t + \Delta t$ i t.
Z proporcjonalności drogi do czasu wynika zaś, że szybkość chwilowa ciała jest stała.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = constans \tag{14}$$

Niech x oznacza położenie ciała w chwili późniejszej t, a x_0 położenie w chwili początkowej t_0. Wtedy $\Delta x = |x - x_0|$, $\Delta t = t - t_0$ oraz

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{15a}$$

$$= \frac{|x - x_0|}{t - t_0} \tag{15b}$$

Jeżeli przyjmiemy, że chwilą początkową t_0 jest $t_0 = 0$, to przekształcając równanie 15b otrzymamy

$$|x - x_0| = vt \tag{16a}$$

Jeżeli ciało porusza się zgodnie ze zwrotem osi Ox, to $x > x_0$ bo x jest położeniem ciała w chwili późniejszej, i

$$|x - x_0| = x - x_0 \quad , \tag{17a}$$

jeżeli zaś ciało porusza się w stronę przeciwną do zwrotu osi Ox, to $x < x_0$ i różnica $x - x_0 < 0$, a wtedy

$$\begin{aligned} |x - x_0| &= -(x - x_0) & \text{(18a)} \\ &= -x + x_0 & \text{(18b)} \end{aligned}$$

Tak więc opis ruchu jednostajnego prostoliniowego ma następującą postać:

$$x(t) = x_0 + vt \tag{19}$$

gdy ciało porusza się z prędkością zwróconą zgodnie ze zwrotem osi Ox, lub

$$x(t) = x_0 - vt \tag{20}$$

gdy ciało porusza się z prędkością zwróconą przeciwnie do zwrotu osi Ox. Używając pojęcia wektora wodzącego $\vec{r}(t)$ i wektora prędkości $\vec{v}$, który w ruchu jednostajnym prostoliniowym jest wektorem stałym (nie zmienia się ani jego wartość, czyli inaczej szybkość, ani kierunek, ani zwrot) możemy równania 19 i 20 zastąpić jednym:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t \tag{21}$$

gdzie $\vec{r}_0$ jest wektorem wodzącym ciała w chwili początkowej t_0. Równanie 21 jest ważne również wówczas, gdy oś Ox układu odniesienia niekoniecznie pokrywa się z prostą będącą torem ruchu ciała. Widać na tym przykładzie, że równanie w postaci wektorowej jest zawsze wygodniejsze, ponieważ może zastąpić kilka równań oraz jest opisem znacznie ogólniejszym.

3.2 Ruch jednostajnie zmienny prostoliniowy

3.2.1 Przyspieszenie

Ruchem jednostajnie zmiennym prostoliniowym nazywamy taki ruch, w czasie którego prędkość ciała wzrasta o taką samą wartość w równych odstępach czasu oraz torem ruchu jest linia prosta.

Zmianę prędkości w ruchu jednostajnie zmiennym charakteryzuje się przez określenie wielkości zwanej **przyspieszeniem**.

W ogólnym przypadku przyspieszeniem nazywa się wektor $\vec{a}$ równy

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \tag{22}$$

W ruchu jednostajnie zmiennym prostoliniowym przyspieszenie jest stałe ponieważ zgodnie z definicją przyrost prędkości jest proporcjonalny do czasu a jego wartość wynosi

$$a = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = constans \tag{23}$$

Jeżeli szybkość w chwili późniejszej, t.j. w chwili $t + \Delta t$ jest większa niż szybkość we wcześniejszej chwili t, czyli zachodzi

$$v(t + \Delta t) > v(t) \tag{24}$$

wtedy, jak wynika z równania (23) przyspieszenie ma wartość dodatnią, a ruch nazywamy **jednostajnie przyspieszonym**. Gdy zaś szybkość w chwili późniejszej, t.j. w chwili $t + \Delta t$ jest mniejsza niż szybkość we wcześniejszej chwili t, czyli zachodzi

$$v(t + \Delta t) < v(t) \tag{25}$$

wtedy z równania (23) wynika, że przyspieszenie ma wartość ujemną, a ruch nazywa się ruchem **jednostajnie opóźnionym**.

Niech

$$\Delta t = t - t_0 \tag{26}$$

gdzie t_0 jest chwilą początkową, a t jakąś późniejszą chwilą ruchu. Wtedy

$$t_0 + \Delta t = t_0 + t - t_0 = t \tag{27}$$

oraz

$$v(t_0 + \Delta t) = v(t) \tag{28}$$

Jeżeli w równaniu (23) za wcześniejszą przyjmiemy chwilę t_0, wtedy otrzymamy

$$a = \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t} \tag{29}$$

Wykorzystując związki (26) oraz (28) w ostatnim równaniu, otrzymamy

$$a = \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} \tag{30}$$

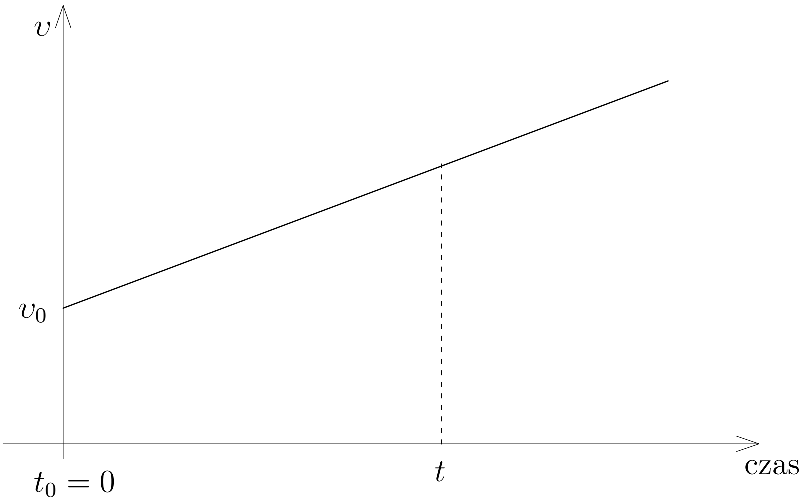
Chwili początkowej t_0 zwyczajowo przypisuje się wartość 0, zaś szybkość w chwili t_0 oznacza się jako v_0 i nazywa **szybkością początkową**. Przyjmując te oznaczenia przyspieszenie można zapisać w postaci

$$a = \frac{v(t) - v_0}{t} \tag{31}$$

Stąd po przekształceniu otrzymujemy zależność szybkości od czasu dla ruchu jednostajnie zmiennego w postaci

$$v(t) = v_0 + a \cdot t \tag{32}$$

Jest to zależność liniowa, a jej wykres przedstawia się następująco:



3.2.2 Droga w ruchu jednostajnie zmiennym prostoliniowym

Aby obliczyć drogę, którą ciało przebyło w czasie t poruszając się ruchem jednostajnie przyspieszonym, jeżeli jego szybkość początkowa wynosiła v_0 wykorzystamy powyższy wykres zależności prędkości od czasu. W tym celu należy obliczyć pole powierzchni trapezu pod wykresem szybkości. Wysokość trapezu wynosi t, krótsza podstawa trapezu ma długość v_0 a dłuższa podstawa zgodnie ze wzorem (32) $v_0 + at$. Ze wzoru na pole trapezu mamy

$$s = \frac{1}{2}(v_0 + v_0 + at)t \tag{33}$$

a po przekształceniu

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{34}$$

W ruchu jednostajnie opóźnionym w późniejszej chwili t szybkość ciała jest mniejsza i wynosi $v0 - at$ więc obliczając pole trapezu będziemy mieli dłuższą podstawę równą v_0, a krótszą $v_0 - at$, stąd wzór końcowy na drogę przyjmie postać

$$s = v_0 t - \frac{1}{2}at^2 \tag{35}$$

3.2.3 Położenie w ruchu jednostajnie zmiennym

Aby obliczyć położenie ciała w dowolnej chwili czasu w ruchu prostoliniowym należy do położenia początkowego dodać przebytą drogę, jeżeli ciało porusza się w kierunku zgodnym ze zwrotem osi położenia lub odjąć przebytą drogę w przeciwnym przypadku. Tak więc w ruchu jednostajnie przyspieszonym w pierwszym przypadku będziemy mieli

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \tag{36}$$

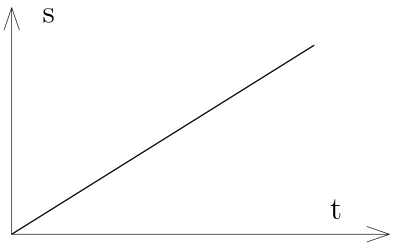
natomiast w drugim przypadku

$$x(t) = x_0 - v_0 t - \frac{1}{2}at^2 \tag{37}$$

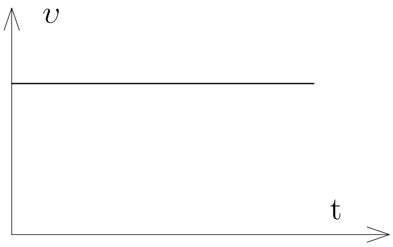
Dla ruchu jednostajnie opóźnionego otrzymamy odpowiednie wzory wstawiając wyrażenie na drogę dane wzorem (35).

3.2.4 Wykresy zależności drogi, prędkości i przyspieszenia od czasu dla ruchów jednowymiarowych

a) ruch jednostajny

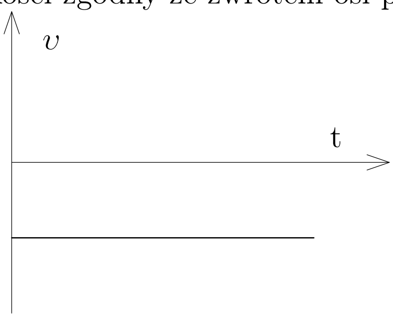


$s(t) = vt$



$v = const > 0$

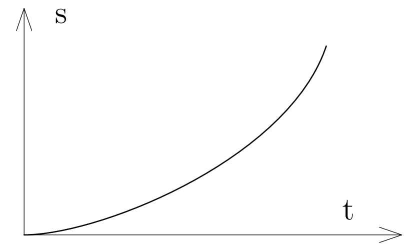
zwrot prędkości zgodny ze zwrotem osi położenia Ox



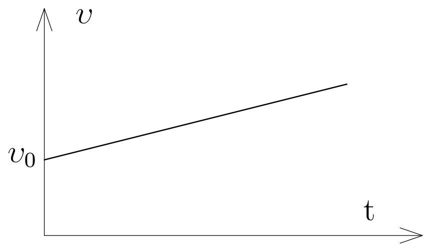
$v = const < 0$

zwrot prędkości przeciwny do zwrotu osi położenia Ox

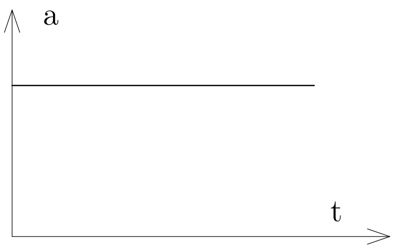
b) ruch jednostajnie przyspieszony



$$s(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

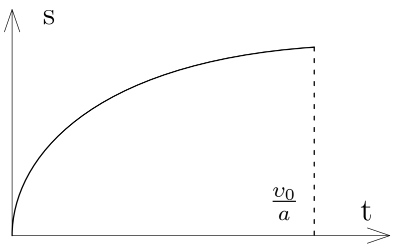


$$v(t) = v_0 + at$$

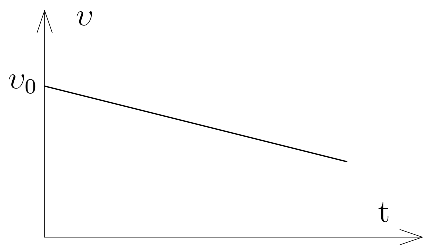


$$a = const > 0$$

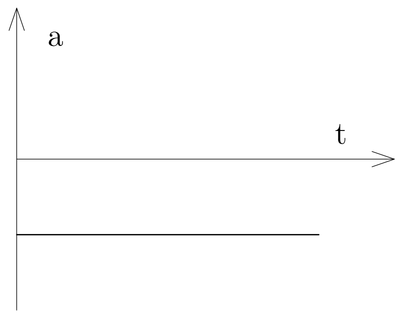
c) ruch jednostajnie opóźniony



$$s(t) = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2$$



$$v(t) = v_0 - at$$



$$a = const < 0$$

3.3 Ważne przykłady ruchów zmiennych prostoliniowych i krzywoliniowych

3.3.1 Spadek swobodny

Spadkiem swobodnym z wysokości h nazywa się ruch ciała upuszczonego z niedużej wysokości z prędkością początkową równą 0, w którym zaniedbujemy opór powietrza. Jest to ruch jednostajnie przyspieszony z przyspieszeniem ziemskim g

$$g \approx 9,81 \, \frac{m}{s^2} \tag{38}$$

Jeżeli oś Ox układu współrzędnych skierujemy pionowo w górę, a jej początek wybierzemy w punkcie zderzenia ciała z ziemią wtedy zależność położenia od czasu dla spadającego ciała na podstawie wzoru (37) ma postać:

$$x(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 \tag{39}$$

We wzorze (37) dokonujemy następujących podstawień:

$$x_0 = h$$

$$v_0 = 0$$

$$a = g$$

Zależność prędkości od czasu w tym ruchu przyjmuje zgodnie ze wzorem (32) postać

$$v(t) = gt \tag{40}$$

3.3.2 Rzut pionowy

Rzut pionowy w dół Rzut pionowy w dół tym różni się od spadku swobodnego, że można go traktować jak spadek swobodny z prędkością początkową $v_0 \neq 0$. Więc we wzorze (39) dojdzie nam dodatkowy wyraz związany z prędkością początkową, skąd otrzymamy zależność położenia od czasu w postaci

$$x(t) = h - v_0 t - \frac{1}{2} gt^2 \tag{41}$$

a ze wzoru (40) zależność prędkości od czasu w postaci

$$v(t) = v_0 + gt \tag{42}$$

Rzut pionowy w górę W przypadku rzutu pionowego w górę, przy takim jak poprzednio usytuowaniu układu współrzędnych mamy $x_0 = 0$ oraz ciału zostaje nadana prędkość początkowa v_0 skierowana pionowo w górę zgodnie ze zwrotem osi Ox. Z uwagi na stałe przyciąganie grawitacyjne Ziemi ruch jest ruchem jednostajnie opóźnionym z opóźnieniem równym jak przy spadku swobodnym wartości przyspieszenia grawitacyjnego g. Tak więc, aby otrzymać położenie ciała w dowolnej chwili t, do położenia początkowego $x_0 = 0$ musimy dodać drogę $s = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ w wyniku czego otrzymamy

$$x(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{43}$$

Prędkość ciała wznoszącego się w górę maleje w miarę upływu czasu. Jej zależność od czasu ma postać

$$v(t) = v_0 - gt \tag{44}$$

W pewnym położeniu na wysokości h_{max} szybkość ta osiąga wartość 0 i wtedy ciało rozpoczyna spadek swobodny. Czas lotu t_m na wysokość h_{max} można obliczyć z równania

$$0 = v_0 - gt_m \tag{45}$$

Po przekształceniu otrzymujemy

$$t_m = \frac{v_0}{g} \tag{46}$$

Ciało wyrzucone pionowo w górę przyjmuje położenie $x(t) = 0$ dwukrotnie. Raz w chwili wyrzutu, a drugi raz w chwili gdy spadając swobodnie wraca do położenia skąd zostało wyrzucone. Chwile t_1 i t_2, w których to następuje można otrzymać z równania (43):

$$0 = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{47}$$

Jest to równanie kwadratowe, które ma dwa rozwiązania

$$0 = t(v_0 - \frac{1}{2} g t) \tag{48}$$

czyli

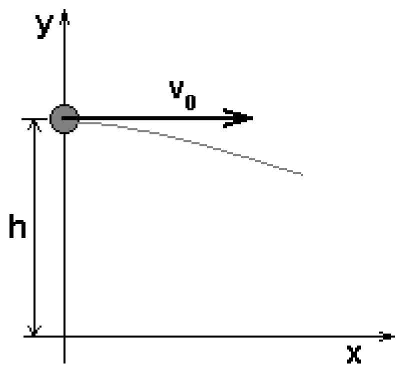
$$t_1 = 0 \qquad lub \qquad v_0 - \frac{1}{2} g t_2 = 0 \tag{49}$$

Chwila $t_1 = 0$ jest to chwila wyrzutu, a $t_2 = \frac{2v_0}{g}$ jest chwilą powrotu ciała do położenia skąd zostało wyrzucone. Widać, że $t_2 = 2t_m$ (zobacz równanie 46), więc można stąd wywnioskować, że czas lotu ciała w górę na wysokość h_{max} jest równy czasowi jego spadku swobodnego z tej samej wysokości.

Jeżeli ciało spada z dużej wysokości nie możemy zaniedbać oporu powietrza gdyż jego prędkość szybko osiąga dużą wartość, a to z kolei powoduje znaczny wzrost oporu powietrza i w rezultacie znaczący wpływ tego oporu, porównywalny z siłą ciążenia, na ruch ciała. Dlatego w powyższych opisach ruchów przyjmuje się, że ciało spada z niedużej wysokości, lub prędkość początkowa nadawana ciałom w tych rzutach nie jest duża.

3.3.3 Rzut poziomy

Rzut poziomy jest to ruch ciała, któremu w chwili początkowej nadano prędkość początkową w kierunku poziomym. Ciało w chwili wyrzutu znajduje się na wysokości h nad ziemią.



Ruch ten należy do kategorii ruchów krzywoliniowych, niejednostajnie zmiennych. Odbywa się w płaszczyźnie, dlatego najwygodniej układ współrzędnych umieścić jest w płaszczyźnie ruchu ciała. Do znalezienia opisu tego ruchu posłużymy się **zasadą niezależności ruchów**, która stwierdza, że każdy ruch ciała można rozpatrywać jako złożenie niezależnych ruchów składowych zachodzących w tym samym czasie (zobacz równanie (10)).

W przypadku rzutu poziomego ruch ciała rozkładamy na dwa ruchy składowe odbywające się jednocześnie:

- ruch jednostajny prostoliniowy z prędkością υ_0 zachodzący w kierunku poziomym (ruch wzdłuż osi OX)
- spadek swobodny z wysokości h (ruch wzdłuż osi OY).

Tak więc współrzędne położenia zależą od czasu w następujący sposób:

$$x(t) = \upsilon_0 t \tag{50}$$

$$y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \tag{51}$$

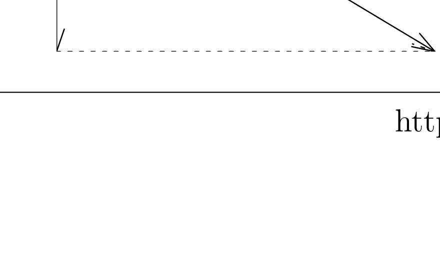
lub jeżeli chcemy to zapisać posługując się pojęciem wektora położenia

$$\overrightarrow{R(t)} = [\upsilon_0 t,\, h - \frac{1}{2}gt^2] \tag{52}$$

Prędkość wypadkowa w każdej chwili jest sumą składowych prędkości

- wkierunku osi OX: $\upsilon_x = \upsilon_0$
- w kierunku osi OY: $\upsilon_y = -gt$

Składowa υ_y jest ujemna z uwagi na wybór układu współrzędnych: przyjęliśmy, że oś OY jest zwrócona w górę. Szybkość i kierunek wektora prędkości w dowolnej chwili t można wyznaczyć ze znajomości składowych wektora prędkości w tej chwili posługując się podstawowymi zależnościami trygonometrycznymi i twierdzeniem Pitagorasa zastosowanymi do trójkąta prostokątnego, który tworzą te składowe i wektor prędkości.



Dla rzutu poziomego definiuje się **zasięg rzutu**, czyli współrzędną x położenia ciała w chwili zderzenia ciała z ziemią (współrzędna y ma wtedy wartość 0).
Z zależności współrzędnej y położenia od czasu znajdujemy czas t_1, w którym współrzędna $y(t)$ ma wartość zero.

$$0 = h - \frac{1}{2}gt_1^2 \tag{53}$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{54}$$

Wstawiając otrzymaną wartość czasu t_1 do zależności współrzędnej x położenia od czasu otrzymamy zasięg rzutu $z = x(t_1)$:

$$z = v_0 t_1 = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{55}$$

3.3.4 Rzut ukośny

Rzut ukośny jest ruchem, w którym ciału nadaje się prędkość początkową w kierunku nachylonym pod pewnym kątem do poziomu. Analiza jego przebiega identycznie jak w przypadku rzutu poziomego, z tą różnicą, że ruchy składowe na jakie rozkładamy ruch złożony, jakim jest rzut ukośny, są to:

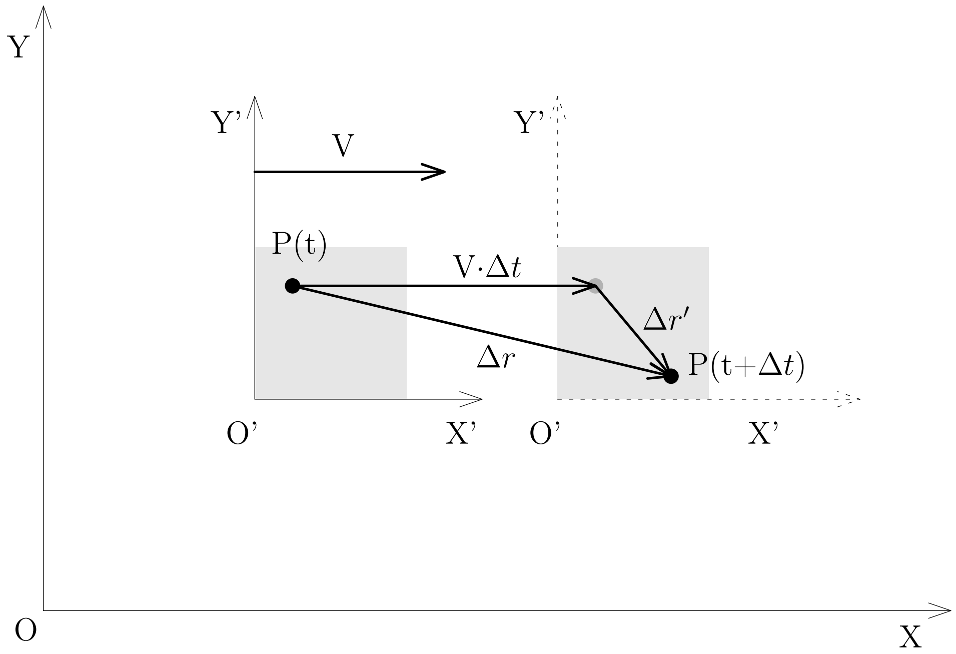
- ruch jednostajny w kierunku poziomym z prędkością równą składowej poziomej prędkości początkowej v_{0x}
- w kierunku pionowym: rzut pionowy w górę (lub w dół) z prędkością początkową równą składowej pionowej prędkości początkowej v_{0y}.

Wykorzystujemy przy tym wszystkie znane nam zależności dla ruchów składowych.

4 Względność prędkości. Transformacja Galileusza

Jak wspomniano wcześniej ruch jest względny, czyli jego opis zależy od wyboru układu odniesienia. Ważne jest znalezienie związku między opisem ruchu w dwóch układach odniesienia, które poruszają się względem siebie ruchem jednostajnym prostoliniowym.

Dla uproszczenia przyjmiemy, że ruch ciała odbywa się w płaszczyźnie, w której wybrano układy X'O'Y' i XOY. Niech układ X'O'Y' porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym względem układu XOY w kierunku osi OX z prędkością $\overrightarrow{V}$. Prędkość $\overrightarrow{V}$ nazwiemy **prędkością unoszenia**, układ XOY **układem spoczynkowym**, a układ X'O'Y' **układem ruchomym**.



Rysunek przedstawia położenie układu ruchomego względem układu spoczynkowego w chwilach t i $t + \Delta t$, oraz przemieszczenie $\overrightarrow{\Delta r}$ ciała P w czasie Δt względem układu spoczynkowego i przemieszczenie $\overrightarrow{\Delta r'}$ tego samego ciała w tym samym czasie względem układu ruchomego. Układ ruchomy przemieszcza się w czasie Δt o wektor $\overrightarrow{V} \cdot \Delta t$.

Widać, że między przemieszczeniami $\overrightarrow{\Delta r}$ i $\overrightarrow{\Delta r'}$ zachodzi związek

$$\overrightarrow{\Delta r} = \overrightarrow{V} \cdot \Delta t + \overrightarrow{\Delta r'} \tag{56}$$

Dzielimy obydwie strony równania przez Δt

$$\frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \overrightarrow{V} + \frac{\overrightarrow{\Delta r'}}{\Delta t} \tag{57}$$

Przechodząc z Δt w granicy do zera otrzymamy

$$\overrightarrow{v(t)} = \overrightarrow{V} + \overrightarrow{v'(t)} \tag{58}$$

Jest to tak zwane **prawo Galileusza dodawania prędkości**: *prędkość ciała P względem układu, w którym obserwator spoczywa jest równa prędkości ciała względem układu poruszającego się plus prędkość względna układu w ruchu.*

Prawo Galileusza możemy wyrazić w sposób równoważny jako związek pomiędzy współrzędnymi położenia ciała w układzie spoczynkowym i w układzie ruchomym. W tym celu ustalmy dla wygody, że w chwili początkowej $t_0 = 0$ początki obydwu układów pokrywają się z sobą i z położeniem początkowym ciała P. Układ ruchomy porusza się prostoliniowo względem układu spoczynkowego w kierunku jego osi OX z prędkością względną $\overrightarrow{V}$. Osie OX i O'X' obydwu układów pokrywają się. W tej sytuacji wszystkie przyrosty współrzędnych można zastąpić współrzędnymi. Związek pomiędzy przemieszczeniami (56) można wówczas zapisać w postaci

$$[x, y] = [V, 0] \cdot t + [x', y'] \tag{59}$$

a po dodaniu wektorów z prawej strony

$$[x, y] = [V \cdot t + x', y'] \tag{60}$$

Oczywiście równość dwóch wektorów jest równoważna równości ich współrzędnych, więc ostatni związek pomiędzy wektorami można zapisać w postaci dwóch równości:

$$\begin{cases} x &= V \cdot t + x' \\ y &= y' \end{cases} \tag{61}$$

Równania (61) noszą nazwę **transformacji Galileusza**. Godne uwagi jest to, że w tej transformacji czas w układzie ruchomym mierzony przez obserwatora znajdującego się w układzie spoczynkowym jest identyczny z czasem mierzonym przez tego obserwatora w swoim układzie, względem którego on spoczywa. Krótko mówiąc, **czas t w transformacji Galileusza nie zależy od układu odniesienia**.