KINEMATYKA I DYNAMIKA
ruchu obrotowego

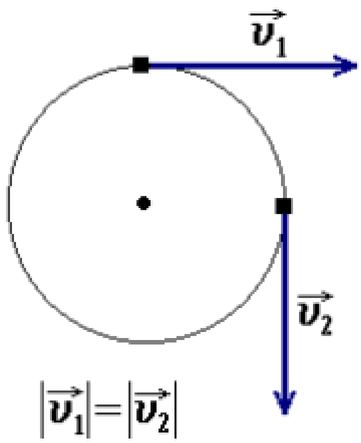
Marian Talar

10 listopada 2006

1 Ruch jednostajny punktu materialnego po okręgu

1.1 Prędkość liniowa

Ruch jednostajny punktu materialnego po okręgu charakteryzuje się stałą wartością prędkości liniowej, która jest wektorem stycznym do okręgu, po którym porusza się punkt, w każdej chwili ruchu.



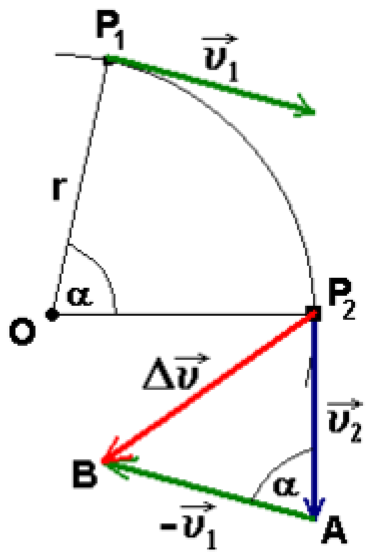
Przykładami tego rodzaju ruchu może być ruch sztucznych satelitów Ziemi poruszających się po orbitach kołowych, ruch Księżyca wokół Ziemi, ruch planet wewnętrznych Układu Słonecznego wokół Słońca, ruch krzesełka karuzeli, ruch wentyla koła jadącego samochodu, ruch cząstki naładowanej w jednorodnym polu magnetycznym, jeżeli wektor prędkości cząstki jest prostopadły do linii pola i.t.p.

1.2 Przyspieszenie dośrodkowe

Ponieważ prędkość liniowa punktu materialnego poruszającego się po okręgu pojmowana jako wektor, jest zmienna (zmienia się jej kierunek) przeto ciało posiada przyspieszenie, które zgodnie z definicją ma postać

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \tag{1}$$

Wybierzmy dwie dowolne chwile t_1 i t_2, i narysujmy wektor zmiany prędkości $\Delta\vec{v} = \vec{v_2} - \vec{v_1}$ punktu poruszającego się po okręgu o promieniu r.



Trójkąty $\triangle OP_1P_2$ i $\triangle ABP_2$ są podobne ponieważ są trójkątami równoramiennymi o ramionach parami do siebie prostopadłych: $AP_2 \perp OP_2$, $AB \perp OP_1$. Wynika z tego, że kąt $\angle P_2BA$ jaki wektor $\Delta\vec{v}$ tworzy z wektorem $\vec{v}_1$ jest równy $90° - \frac{\alpha}{2}$. Gdy wybieramy punkty P_1 i P_2 coraz bliżej siebie, a więc gdy Δt zmierza do zera, wtedy kąt α też zmierza do zera i $\Delta\vec{v}$ staje się prostopadłe do $\vec{v}_1$, a w konsekwencji przyspieszenie zdefiniowane równaniem (1) jest wektorem o kierunku prostopadłym do kierunku wektora prędkości chwilowej w każdej danej chwili ruchu i zwrócone jest do środka okręgu. Stąd pochodzi jego nazwa: **przyspieszenie dośrodkowe**. Wartość przyspieszenia dośrodkowego oznacza szybkość z jaką zmienia się kierunek wektora prędkości w ruchu jednostajnym po okręgu.

Aby wyznaczyć wartość przyspieszenia dośrodkowego wykorzystamy podobieństwo trójkątów $\triangle OP_1P_2$ i $\triangle ABP_2$.

$$\frac{P_1P_2}{P_1O} = \frac{P_2B}{AB} \tag{2}$$

Jeżeli punkty P_1 i P_2 są położone bardzo blisko siebie, to znaczy gdy Δt zmierza do zera można przyjąć, że $|\overline{P_1P_2}| \approx |\widehat{P_1P_2}| = v\Delta t$,
gdzie $v = |\vec{v}_1| = |\vec{v}_2|$, więc

$$\frac{v\Delta t}{r} \approx \frac{\Delta v}{v} \tag{3}$$

Z powyższego równania otrzymujemy stosunek wartości przyrostu wektora prędkości do czasu

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} \approx \frac{v^2}{r} \tag{4}$$

Gdy z czasem Δt przechodzimy do zera możemy równość przybliżoną zastąpić równością dokładną, ostatecznie więc otrzymujemy wyrażenia na **wartość przyspieszenia dośrodkowego** w postaci:

$$a = \frac{v^2}{r} \tag{5}$$

1.3 Siła dośrodkowa

Zgodnie z pierwszą zasadą dynamiki ciało nie może samo zmieniać swojej prędkości, w tym również jej kierunku. Zmiana kierunku wektora prędkości może zostać spowodowana jedynie przez siłę zewnętrzną. Z kolei druga zasada dynamiki stwierdza, że siła działająca na ciało powoduje jego przyspieszenie i pomiędzy tymi wielkościami zachodzi związek

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{6}$$

W ogólnym przypadku jeżeli siła nie jest stała również przyspieszenie nie jest stałe, ale między siłą i przyspieszeniem powyższy związek zachodzi i oznacza równość siły i iloczynu masy ciała i przyspieszenia w każdej chwili. Równość ma charakter wektorowy co oznacza równość zarówno wartości lewej i prawej strony jak i równość kierunków siły i przyspieszenia.

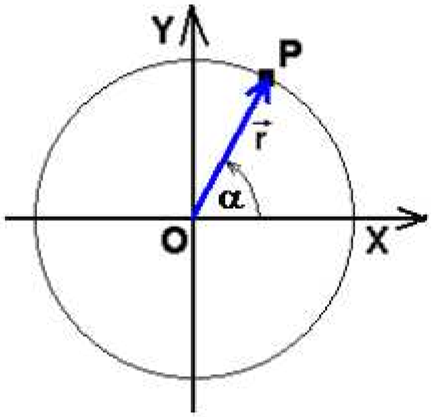
W ruchu jednostajnym po okręgu oznacza to, że na ciało poruszające się po okręgu działa w każdej chwili siła skierowana do środka okręgu, po którym porusza się ciało i jest to siła, która powoduje ciągłą zmianę kierunku wektora prędkości, nie powodująca jednoczesnej zmiany wartości prędkości z uwagi właśnie na fakt, że działa w kierunku do niej prostopadłym. Również z powyższego powodu siła ta nie wykonuje pracy, czyli nie powoduje zwiększenia energii kinetycznej punktu materialnego.

Wartość siły dośrodkowej można obliczyć w oparciu o drugą zasadę dynamiki i wyrażenie (5) na przyspieszenie dośrodkowe:

$$F_d = \frac{mv^2}{r} \tag{7}$$

1.4 Częstotliwość, okres, szybkość kątowa

Jeżeli do opisu ruchu po okręgu zastosujemy układ odniesienia, którego początek zwiążemy ze środkiem okręgu, wtedy wektor położenia $\vec{r}$ nie zmienia swojej wartości w czasie ruchu, zmienia się tylko jego kierunek. Do opisu położenia punktu materialnego wystarczy więc podać kąt α pomiędzy osią OX układu a kierunkiem wektora prędkości $\vec{r}$ w danej chwili. Tak więc ruch zostanie w pełni opisany jeżeli podamy zależność $\alpha(t)$.



Kąt α jest kątem skierowanym, to znaczy ma wyróżnione ramię pierwsze i ramię drugie (podobnie wektor jest odcinkiem skierowanym - jeden z końców odcinka jest punktem początkowym wektora, a drugi jest punktem końcowym). Pierwszym ramieniem jest półoś OX a drugim ramieniem półprosta zawierająca wektor $\vec{r}$. Jeżeli drugie ramię kąta obraca się w kierunku przeciwnym do wskazówek zegara, wtedy przyjmuje się na ogół, że kąt α jest dodatni, gdy drugie ramię obraca się zgodnie ze wskazówkami zegara, wtedy kąt α przyjmuje się za ujemny.

Szybkością kątową nazywa się stosunek przyrostu kąta $\Delta\alpha$ do czasu Δt, w którym ten przyrost nastąpił w granicy gdy Δt zmierza do zera.

$$\omega = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} \tag{8}$$

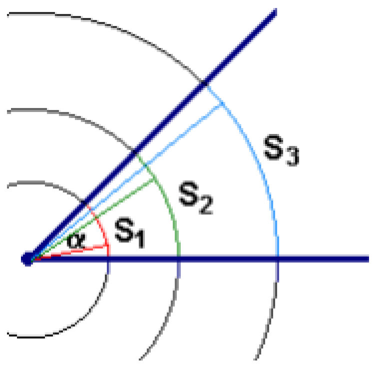
W ruchu jednostajnym szybkość kątowa jest stała i równa stosunkowi kąta zakreślonego przez promień wodzący $\vec{r}$ do czasu, w którym ten kąt został zakreślony.

$$\omega = \frac{\alpha}{t} \tag{9}$$

`Matematyczna dygresja`

Miara łukowa kąta

Narysujmy kilka okręgów współśrodkowych o różnych promieniach oraz o wspólnym środku w wierzchołku kąta.



Długości łuków różnych okręgów zawartych wewnątrz kąta α mają różną długość, więc sam łuk jak widać nie definiuje jednoznacznie danego kąta. Natomiast stosunek długości łuku danego okręgu do promienia tego okręgu jest taki sam dla wszystkich okręgów.

$$\frac{S_1}{r_1} = \frac{S_2}{r_2} = \frac{S_3}{r_3} \tag{10}$$

W związku z tym nadaje się on na jednoznaczną definicję miary danego kąta α. Miarę tę nazywa się **miarą łukową**.

$$\alpha = \frac{S}{r} \tag{11}$$

Jednostkę miary kąta w mierze łukowej nazywa się **radianem** (1 rad). Jeden radian jest to taki kąt, który z okręgu o środku w wierzchołku kąta i promieniu równym r wycina łuk o długości S równej promieniowi r tego okręgu.

Zgodnie z tą definicją jest

$$\alpha = \frac{r}{r} = 1\, rad \tag{12}$$

Kąt pełny $\alpha = 360^\circ$ jest łatwo wyrazić w mierze łukowej . Kąt pełny „wycina" z okręgu cały okrąg, więc $S = 2\pi r$. Stąd i z definicji miary łukowej już łatwo wynika że

$$360^\circ = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi\, rad \tag{13}$$

Kąt półpełny $180^\circ = \pi\, rad$

Kąt prosty $90^\circ = \frac{\pi}{2}\, rad$

i.t.d.

Dla ruchu jednostajnego po okręgu definiuje się wielkość zwaną okresem i wielkość do niej odwrotną zwaną częstotliwością obrotów, lub krótko częstotliwością. **Okres** T jest to czas, w którym punkt materialny wykonuje jeden pełny obrót. Natomiast **częstotliwość** ν jest to ilość obrotów wykonywana w jednostce czasu. Jeżeli jednostką czasu jest 1 sekunda to jednostkę częstotliwości nazywa się **hercem** i oznacza **Hz**.

Jeżeli czas jednego pełnego obrotu jest równy T to częstotliwość obrotów wynosi

$$\nu = \frac{1}{T} \tag{14}$$

Jeden pełny obrót punktu materialnego oznacza, że promień wodzący zakreśla kąt pełny, czyli $\alpha = 2\pi\, rad$. Stąd i z definicji szybkości kątowej (9) można łatwo wyrazić szybkość kątową przez okres

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{15}$$

lub korzystając z (14), przez częstotliwość

$$\omega = 2\pi\nu \tag{16}$$

W oparciu o miarę łukową kąta łatwo też jest wyrazić związek pomiędzy zwykłą szybkością v punktu materialnego poruszającego się po okręgu (nazywaną też **szybkością liniową**) a szybkością kątową ω tego punktu materialnego.

Ponieważ

$$v = \frac{S}{t} \tag{17}$$

gdzie S oznacza długość łuku zakreślonego przez punkt materialny w czasie t, a długość tego łuku zgodnie z definicją miary łukowej kąta można wyrazić przez tę miarę na podstawie (11) w postaci

$$S = \alpha r \tag{18}$$

więc szybkość liniowa

$$v = \frac{\alpha r}{t} = \frac{\alpha}{t} r = \omega r \tag{19}$$

Ostatecznie szybkość liniowa wyraża się poprzez szybkość kątową lub odwrotnie za pomocą związku:

$$v = \omega r \tag{20}$$

a poprzez częstotliwość

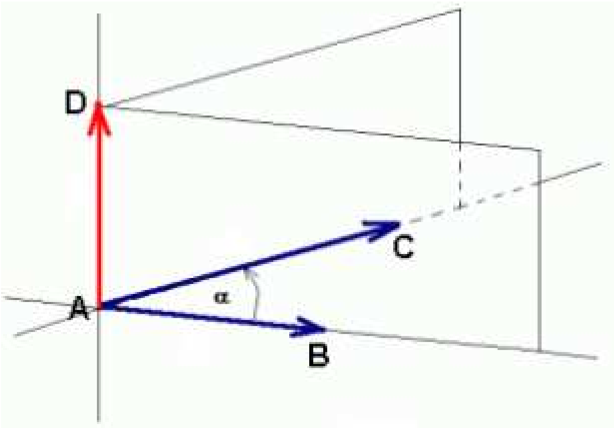
$$v = 2\pi \nu r \tag{21}$$

i wreszcie poprzez okres

$$v = \frac{2\pi r}{T} \tag{22}$$

Związek między szybkością kątową i liniową (20) można wyrazić w postaci wektorowej. Pozwala to na jednoznaczne określenie zwrotu prędkości liniowej i kierunku wirowania ciała.

Przyjmuje się umowną konwencję, zgodnie z którą kierunek obrotu ciała zgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara przyjmuje się za dodatni, a wyznaczony przez ten obrót ruch śruby prawoskrętnej wskazuje zwrot dodatni na prostej prostopadłej do płaszczyzny obrotu. Zgodnie z tą konwencją definiuje się iloczyn wektorowy dwóch wektorów $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ jako wektor $\overrightarrow{AD}$ prostopadły do płaszczyzny, w której leżą wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$, a jego zwrot jest określony przez konwencję śruby prawoskrętnej gdy wektor $\overrightarrow{AB}$ obraca się w stronę wektora $\overrightarrow{AC}$



Powyższy rysunek ilustruje definicję iloczynu wektorowego dwóch wektorów.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \tag{23}$$

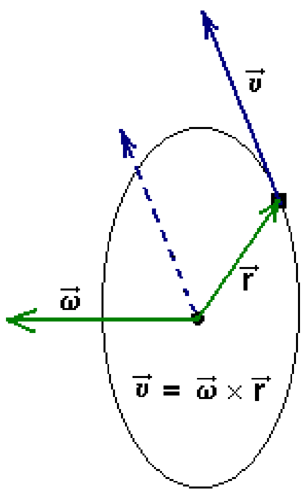
Wartość wektora $\overrightarrow{AD}$, będącego iloczynem wektorowym jest równa

$$|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \sin\alpha \tag{24}$$

Wykorzystując powyższe można związek (20) zapisać w postaci wektorowej:

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{r} \tag{25}$$

co ilustruje poniższy rysunek.



1.5 Ruch zmienny po okręgu

Jeżeli punkt materialny porusza się po okręgu w ten sposób, że jego prędkość styczna do okręgu zmienia się, wtedy można dla tego ruchu określić przyspieszenie kątowe. Wykorzystamy w tym celu związek (20) słuszny również w przypadku ogólnym.Ponieważ ciało to posiada przyspieszenie styczne do okręgu a_s, które jest związane ze zmianą wartości prędkości (nie kierunku, jak to było w przypadku ruchu jednostajnego po okręgu i przyspieszenia dośrodkowego), można wartość tego przyspieszenia obliczyć zgodnie z definicją przyspieszenia

$$a_s = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta(\omega r)}{\Delta t} = \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \right) r \tag{26}$$

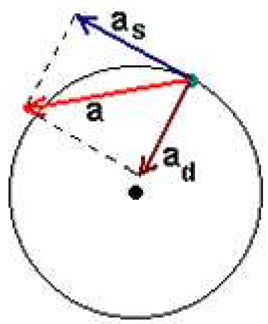
Definiując przyspieszenie kątowe ε jako

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \tag{27}$$

możemy napisać równanie (26) w postaci

$$a_s = \varepsilon \, r \tag{28}$$

Przyspieszenie całkowite ciała poruszającego się ruchem zmiennym po okręgu jest sumą wektorową przyspieszenia dośrodkowego i przyspieszenia stycznego.



$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a_d} + \overrightarrow{a_s} \tag{29}$$

Opis ruchu jednostajnie przyspieszonego po okręgu jest formalnie identyczny z ruchem jednostajnie zmiennym prostoliniowym. Poniżej w tabeli zebrano porównanie wzorów opisujących obydwa ruchy.

ruch postępowy	ruch obrotowy
x	α
$\upsilon = \frac{\Delta x}{\Delta t}$	$\omega = \frac{\Delta \alpha}{\Delta t}$
$a = \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t}$	$\varepsilon = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$
$\upsilon = \upsilon_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$
$x = x_0 + \upsilon_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\alpha = \alpha_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2$

2 Ruch obrotowy bryły sztywnej

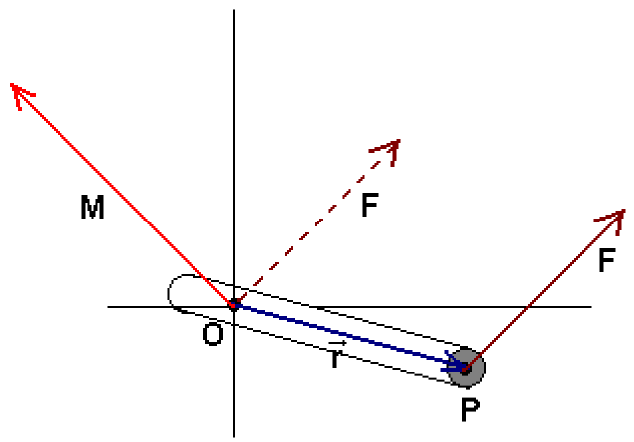
2.1 Moment siły

Bryła sztywna jest modelem ciała rozciągłego. Niezależnie od działających na nią sił dowolne dwa jej punkty pozostają w tej samej odległości od siebie. W przypadku takiego ciała istotny jest punkt przyłożenia siły. W zależności od punktu przyłożenia siły ciało będzie się poruszać albo tylko ruchem postępowym, albo tylko ruchem obrotowym lub będzie wykonywać obydwa ruchy jednocześnie.

Niech siła $\overrightarrow{F}$ będzie przyłożona w punkcie P ciała. **Momentem siły** $\overrightarrow{F}$ względem punktu O jest iloczyn wektorowy $\overrightarrow{M}$

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{F} \tag{30}$$

gdzie $\overrightarrow{r}$ jest wektorem położenia punktu P w układzie odniesienia o początku w punkcie O.



Gdy na ciało działa więcej sił ciało to pozostaje w stanie równowagi jeżeli spełnione są dwa warunki:

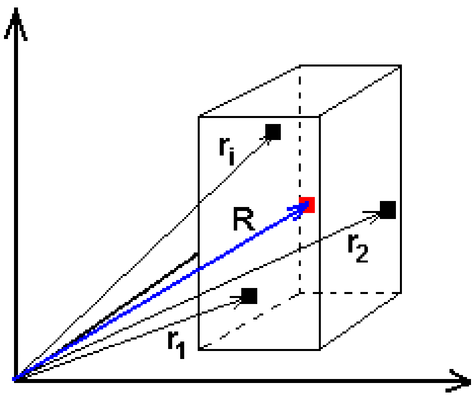
- wektorowa suma sił równa jest zero
- wektorowa suma momentów sił jest równa zero

2.2 Środek masy i środek ciężkości

Każde ciało rozciągłe ma jeden charakterystyczny dla siebie punkt S_M zwany **środkiem masy** tego ciała. Aby określić położenie środka masy ciała względem jakiegoś układu odniesienia, dzielimy go na N bardzo małych elementów, które można traktować jak punkty materialne. Położenie elementu i określa wektor $\overrightarrow{r_i}$, masa tego elementu wynosi m_i. Położenie $\overrightarrow{R}$ środka masy ciała definiuje wzór

$$\overrightarrow{R} = \frac{m_1\overrightarrow{r_1} + m_2\overrightarrow{r_2} + \ldots + m_N\overrightarrow{r_N}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N} \tag{31}$$

Oczywiście wektor położenia środka masy danego ciała będzie zależał od układu odniesienia, ale sam punkt S_M środka masy jest dla danego ciała zawsze ten sam.



Środek masy ciała nie musi znajdować się wewnątrz ciała. Ponadto środek masy ma również układ wielu ciał, które nie muszą być z sobą połączone, jak na przykład Ziemia i Księżyc, które okrążają się nawzajem wokół środka masy tego układu.

Dla pojedynczego ciała podlegającego oddziaływaniu siły ciężkości środek masy pokrywa się ze **środkiem ciężkości**, czyli takim punktem ciała, do którego przyłożona jest wypadkowa siła ciężkości będąca sumą sił ciężkości działających na każdy punkt tego ciała. Położenie środka ciężkości ma duże znaczenie dla równowagi ciała.

Jeżeli ciało zostanie zawieszone w punkcie P, to siła ciężkości wytwarza moment sił, który tak obróci ciało, aby znalazło się ono w stanie **równowagi trwałej**, co stanie się wówczas, gdy punkt P i środek ciężkości znajdą się na jednej prostej pionowej, przy czym środek ciężkości będzie znajdował się niżej.

Jeżeli punkt zawieszenie P będzie pokrywał się ze środkiem ciężkości ciała, wówczas ciało to będzie znajdować się w stanie **równowagi obojętnej**, czyli siła ciężkości w dowolnym położeniu tego ciała nie będzie wytwarzać momentu obrotowego. Ciało będzie spoczywać w dowolnym położeniu.

Gdyby zaś środek ciężkości znajdował się powyżej punktu podparcia ciała, to będzie ono w stanie **równowagi chwiejnej**, czyli najmniejsze odchylenie od pionu prostej utworzonej przez punkty podparcia i środek ciężkości doprowadzi do utraty stabilności. Ciało podparte znajduje się w równowadze trwałej wtedy gdy środek ciężkości tego ciała znajduje się ponad powierzchnią podparcia lub ponad powierzchnią figury utworzonej przez punkty podparcia.

2.3 Dynamika ruchu obrotowego bryły sztywnej

Bryłę sztywną możemy traktować jak zbiór wielu punktów materialnych. Prawa dynamiki ruchu obrotowego wynikają więc z praw dynamiki ruchu punktu materialnego. Rozpatrzymy ruch obrotowy bryły wokół osi nieruchomej o stałym kierunku w przestrzeni. Założymy, że oś obrotu pokrywa się z osią inercjalnego układu odniesienia. W takim przypadku wszystkie punkty bryły, poza tymi, które leżą na osi obrotu poruszają się po okręgach leżących w płaszczyźnie XY prostopadłej do osi obrotu o środkach położonych na osi obrotu. Szybkości kątowe i przyspieszenia kątowe wszystkich punktów bryły są jednakowe. Natomiast prędkości liniowe i przyspieszenia liniowe punktów bryły są różne, zależnie od odległości punktu od osi obrotu. Do różnych punktów bryły mogą być przyłożone siły zewnętrzne.

Rozpatrzymy ruch jednego z punktów materialnych P_i składających się na bryłę. Położenie punktu dane jest przez wektor $\overrightarrow{r_i}$, a jego masa przez m_i. Na podstawie wzoru (28) możemy zapisać przyspieszenie styczne punktu P_i w postaci

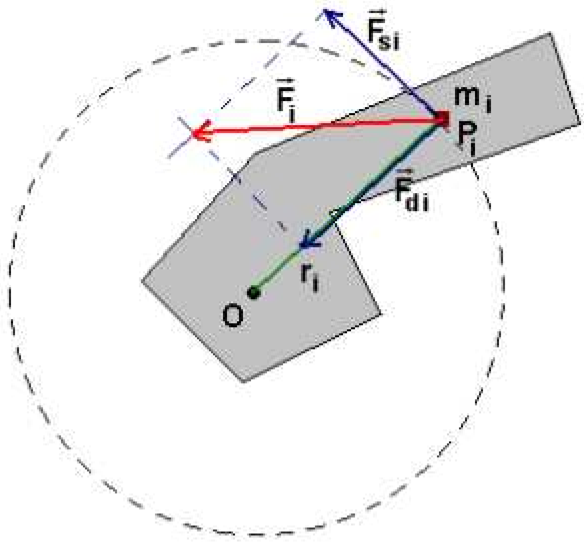
$$a_{si} = \varepsilon\, r_i \tag{32}$$

przyspieszenia kątowego punktu P_i nie oznaczono indeksem i ponieważ przyspieszenia kątowe wszystkich punktów bryły są takie same.

Pomnóżmy obie strony równania przez masę punktu m_i. Otrzymamy

$$m_i\, a_{si} = m_i\, \varepsilon\, r_i \tag{33}$$

Lewa strona równania przedstawia składową F_{si} siły $\overrightarrow{F_i}$ działającej na punkt P_i styczną do okręgu. Wystarczy to do określenia momentu siły $\overrightarrow{F_i}$ względem osi obrotu, gdyż druga składowa tej siły F_{di} skierowana wzdłuż promienia wodzącego punktu P_i ma moment względem osi obrotu równy zero.



Tak więc siłę F_{si} można zapisać w postaci

$$F_{si} = m_i\, \varepsilon\, r_i \tag{34}$$

a po pomnożeniu obydwu stron ostatniego równania przez r_i

$$F_{si}\, r_i = m_i\, r_i^2\, \varepsilon \tag{35}$$

Ponieważ wektor siły $\overrightarrow{F_{si}}$ jest prostopadły do wektora wodzącego $\overrightarrow{r_i}$ więc lewa strona ostatniego równania przedstawia moment siły działający na punkt P_i względem osi obrotu

$$M_i = m_i\, r_i^2\, \varepsilon \tag{36}$$

Jeżeli teraz zsumujemy wszystkie momenty sił działające na punkty materialne tworzące bryłę otrzymamy całkowity moment sił działających na bryłę sztywną, który spełnia zależność

$$\sum_i M_i = \sum_i (m_i\, r_i^2)\, \varepsilon \tag{37}$$

lub w prostszej postaci

$$M = I\,\varepsilon \tag{38}$$

gdzie przez I oznaczono sumę po wszystkich punktach bryły iloczynów mas tych punktów i kwadratów ich odległości od osi obrotu. Wielkość tak utworzona nosi nazwę **momentu bezwładności** bryły względem danej osi obrotu.

$$I = \sum_i m_i\, r_i^2 \tag{39}$$

Równanie (38) przypomina formalnie II zasadę dynamiki dla ruchu postępowego $F = m\,a$. Moment siły M odpowiada sile F, moment bezwładności I bryły odpowiada masie m, a przyspieszenie kątowe ε odpowiada przyspieszeniu liniowemu a.

Równanie to można zapisać w formie wektorowej

$$\overrightarrow{M} = I\,\overrightarrow{\varepsilon} \tag{40}$$

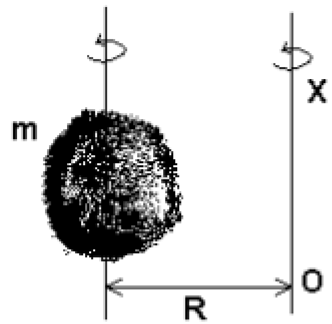
gdzie wektor przyspieszenia kątowego $\overrightarrow{\varepsilon}$ jest prostopadły do płaszczyzny obrotu i skierowany wzdłuż osi obrotu, a jego zwrot jest taki jak zwrot momentu siły $\overrightarrow{M}$.

Równania (38, 40) wyrażają treść tak zwanej **drugiej zasady dynamiki dla ruchu obrotowego** względem ustalonej osi obrotu: *jeżeli na bryłę działa moment sił różny od zera, to powoduje on przyspieszenie kątowe ruchu obrotowego tej bryły, które jest wprost proporcjonalne do działającego momentu sił, a odwrotnie proporcjonalne do momentu bezwładności tej bryły względem osi obrotu.*

2.4 Przykłady obliczania momentu bezwładności brył

Moment bezwładności bryły jest bardzo ważny w przypadku jej ruchu obrotowego, gdyż pełni on rolę masy we wszystkich wielkościach charakteryzujących ruch obrotowy, takich jak moment pędu, energia kinetyczna, czy druga zasada dynamiki dla ruchu obrotowego. Dlatego ważna jest umiejętność jego obliczania.

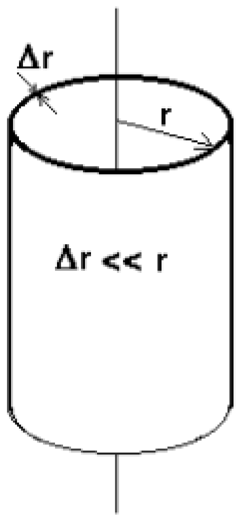
W przypadku ogólnym trudno jest obliczyć moment bezwładności dla bryły o skomplikowanym kształcie. Należy wtedy stosować metody rachunku całkowego aby obliczyć sumy $\sum_i m_i\, r_i^2$ po całej bryle. Jednak dla brył symetrycznych i o jednorodnym rozkładzie masy jest to stosunkowo łatwe. Można również zastosować tutaj **twierdzenie Steinera**: *moment bezwładności bryły względem dowolnej osi OX jest równy sumie momentu bezwładności tej bryły I względem osi równoległej do OX i przechodzącej przez środek masy ciała i wyrazu* $m\,R^2$*, gdzie R jest odległością obydwu osi od siebie, a m jest masą ciała.*



$$I_{OX} = I + m\,R^2 \tag{41}$$

2.4.1 Moment bezwładności cienkościennego cylindra

Moment bezwładności cienkościennego cylindra (np z blachy) względem jego osi symetrii jest bardzo łatwo policzyć, ponieważ każdy punkt cylindra jest w tej samej odległości od osi. Zakładamy przy tym, że grubość cylindra Δr jest bardzo mała w porównaniu z promieniem r tego cylindra (założenie cienkościenności cylindra).



$$I = \sum_i m_i \, r_i^2 = \left(\sum_i m_i \right) r^2 = m \, r^2 \tag{42}$$

Przy sumowaniu wykorzystaliśmy fakt, że dla każdego i-tego punktu cylindra $r_i \approx r$, oraz to że suma mas m_i poszczególnych punktów cylindra jest równa masie m całego cylindra.

2.4.2 Moment bezwładności walca

Do obliczenia momentu bezwładności walca o promieniu r i masie m względem jego osi symetrii wykorzystamy uzyskany wcześniej wynik dla cienkościennego cylindra. Walec podzielimy na ciąg n cienkościennych cylindrów współosiowych o promieniach r_i zmieniających się od zera do r i jednakowej grubości Δr. Masę m_i cylindra o promieniu r_i wyrazimy przez jego gęstość d. Jest to masa prostokątnego arkusza blachy o grubości Δr i wymiarach $2 \, \pi \, r_i$ i h.

$$m_i = 2 \, \pi \, r_i \, h \, \Delta r \, d \tag{43}$$

Stąd i z (42) otrzymujemy wyrażenie na moment bezwładności I_i cylindra o promieniu r_i:

$$I_i = 2 \, \pi \, h \, d \, r_i^3 \, \Delta r \tag{44}$$

Korzystając z rozwinięcia dwumianu Newtona $(a + b)^n$ przedstawimy iloczyn $r_i^3 \Delta r$ w innej postaci.

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} a^{n-j} \, b^j \tag{45}$$

gdzie $\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix}$ jest **symbolem Newtona** i daje się przedstawić w postaci

$$\begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} = \frac{n!}{j! \cdot (n-j)!} \tag{46}$$

Tak więc

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{1}{2}n(n-1)a^{n-2}b^2 + \ldots + b^n \tag{47}$$

Rozwiniemy na sumę dwumian $(r + \Delta r)^n$

$$(r+\Delta r)^n = r^n + nr^{n-1}\Delta r + \frac{1}{2}n(n-1)r^{n-2}\Delta r^2 + \ldots + \Delta r^n \tag{48}$$

Ponieważ Δr jest bardzo małe możemy zaniedbać wszystkie wyrazy rozwinięcia z potęgami Δr o wykładniku większym niż jeden, i wtedy mamy równość przybliżoną

$$(r+\Delta r)^n \approx r^n + n r^{n-1}\Delta r \tag{49}$$

Z ostatniego równania obliczamy iloczyn $r^{n-1}\Delta r$

$$r^{n-1}\Delta r \approx \frac{(r+\Delta r)^n - r^n}{n} \tag{50}$$

Porównując (44) widać, że nam potrzebny jest iloczyn $r^{n-1}\Delta r$ z $n-1=3$ czyli dla $n=4$

$$r^3\Delta r \approx \frac{(r+\Delta r)^4 - r^4}{4} \tag{51}$$

Podstawiając do wzoru (44) na moment bezwładności I_i i-tego cylindra otrzymujemy

$$I_i \approx 2\,\pi\,h\,d\,\frac{(r_i+\Delta r)^4 - r_i^4}{4} \tag{52}$$

$$I_i \approx \frac{\pi\,h\,d}{2}\,((r_i+\Delta r)^4 - r_i^4) \tag{53}$$

lub w postaci

$$I_i \approx \frac{\pi\,h\,d}{2}\,(r_i+\Delta r)^4 - \frac{\pi\,h\,d}{2}\,r_i^4 \tag{54}$$

Z drugiej strony łatwo zauważyć, że moment bezwładności cylindra I_i jest równy różnicy pomiędzy momentem bezwładności walca o promieniu $r_i+\Delta r$ a momentem bezwładności walca o promieniu r_i to znaczy

$$I_i = I(r_i+\Delta r) - I(r_i) \tag{55}$$

gdzie I(r) funkcją przedstawiającą moment bezwładności walca o promieniu r. Porównując dwa ostatnie równania łatwo widać, że funkcja I(r) ma postać:

$$I(r) = \frac{1}{2}\pi\,h\,d\,r^4 = \frac{1}{2}\,(\pi\,r^2\,h\,d)\,r^2 \tag{56}$$

Masa walca o promieniu r, wysokości h i gęstości d wynosi

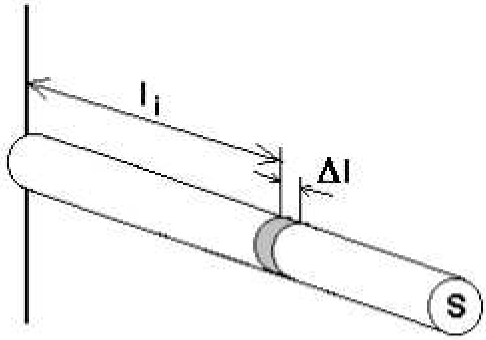
$$m = \pi\,r^2\,h\,d \tag{57}$$

Stąd moment bezwładności walca względem osi symetrii wynosi

$$I = \frac{1}{2}\,m\,r^2 \tag{58}$$

2.4.3 Moment bezwładności cienkiego pręta

a) względem osi przechodzącej przez koniec pręta. Taką samą metodę zastosujemy do obliczenia momentu bezwładności cienkiego pręta względem osi przechodzącej przez jego koniec.



Niech S oznacza pole przekroju poprzecznego pręta, d jego gęstość, a l długość pręta. Podzielimy pręt na małe kawałeczki o równej długości Δl. Ponieważ pręt jest cienki możemy traktować kawałek o długości Δl jak punkt materialny. Niech odległość i-tego kawałka od osi obrotu będzie l_i. Masa i-tego kawałka wynosi $m_i = S\,\Delta l\, d$. Moment bezwładności i-tego kawałka wynosi więc

$$I_i = m_i\, l_i^2 = S\, d\, l_i^2\, \Delta l \tag{59}$$

Wykorzystamy wzór (50) do przekształcenia iloczynu $l_i^2 \Delta l$, przy czym we wzorze (50) $n - 1 = 2$, czyli $n = 3$.

$$l_i^2\, \Delta l = \frac{(l_i + \Delta l)^3 - l_i^3}{3} \tag{60}$$

wówczas

$$I_i = S\, d\, \frac{(l_i + \Delta l)^3 - l_i^3}{3} \tag{61}$$

lub po przekształceniu

$$I_i = \frac{S\, d}{3}\,(l_i + \Delta l)^3 - \frac{S\, d}{3}\, l_i^3 \tag{62}$$

Jak poprzednio zauważamy, że moment bezwładności i-tego kawałka jest równy różnicy między momentem bezwładności pręta o długości $l_i + \Delta l$ a momentem bezwładności pręta o długości l_i, czyli

$$I_i = I(l_i + \Delta l) - I(l_i) \tag{63}$$

gdzie I(l) jest momentem bezwładności pręta o długości l. Porównując dwa ostatnie wzory widzimy, że funkcja I(l) musi mieć postać:

$$I = \frac{1}{3}\, S\, d\, l^3 = \frac{1}{3}\, (S\, d\, l)\, l^2 \tag{64}$$

Ponieważ masa pręta o długości l, polu przekroju S i gęstości d wynosi

$$m = S\, d\, l \tag{65}$$

więc ostatecznie moment bezwładności pręta względem osi przechodącej przez jego koniec wynosi

$$I = \frac{1}{3}\, m\, l^2 \tag{66}$$

b) względem osi przechodzącej przez środek pręta. Dla obliczenia momentu bezwładności pręta względem osi przechodzącej przez jego środek wykorzystamy wynik z paragrafu a) oraz twierdzenie Steinera.

Niech I_0 oznacza moment bezwładności pręta względem osi przechodzącej przez jego środek. $I = \frac{1}{3}\, m\, l^2$ jest momentem pręta względem osi przechodzącej przez jego koniec. Odległość obydwu osi wynosi $\frac{1}{2}\, l$. Z twierdzenia Steinera otrzymujemy związek

$$\frac{1}{3}\, m\, l^2 = I_0 + m\, (\frac{1}{2}\, l)^2 \tag{67}$$

Stąd po przekształceniach otrzymujemy szukany moment bezwładności I_0

$$I_0 = \frac{1}{12}\, m\, l^2 \tag{68}$$

2.4.4 Moment bezwładności kuli

Moment bezwładności pełnej kuli względem dowolnej jej średnicy jest równy

$$I = \frac{2}{5}\, m\, r^2 \tag{69}$$

Moment bezwładności cienkiej sfery względem dowolnej jej średnicy jest równy

$$I = \frac{2}{3}\, m\, r^2 \tag{70}$$

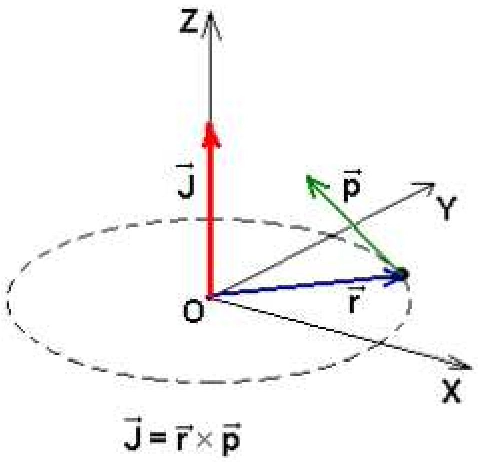
2.5 Moment pędu

Analogicznie do definicji momentu siły definiuje się **moment pędu** punktu materialnego względem osi obrotu. Przyjmijmy, że punkt materialny o masie m porusza się po okręgu względem ustalonej osi obrotu, a więc w płaszczyźnie XY prostopadłej do osi obrotu. Układ odniesienia wybieramy tak, aby oś obrotu pokrywała się z osią OZ tego układu. Wtedy moment pędu $\overrightarrow{J}$ tego punktu ma postać:

$$\overrightarrow{J} = \overrightarrow{r} \times \overrightarrow{p} \tag{71}$$

gdzie $\overrightarrow{r}$ jest wektorem wodzącym punktu. Zwrot wektora momentu pędu określony jest przez regułę śruby prawoskrętnej zgodnie z definicją iloczynu wektorowego. Ponieważ wektor pędu jest zawsze prostopadły do promienia wodzącego $\overrightarrow{r}$ (bo prędkość jest styczna do okręgu) więc wektor momentu pędu ma tylko jedną składową wzdłuż osi OZ, a jej wartość jest równa iloczynowi wartości promienia wodzącego i pędu więc można napisać

$$J = r\,p \tag{72}$$



Wykorzystując związek (20) między prędkością liniową i prędkością kątową można ostatnie równanie przedstawić w postaci:

$$J = r\,m\,v = r\,m\,\omega\,r = m\,r^2\,\omega \tag{73}$$

Dla bryły sztywnej obracającej się wokół ustalonej osi obrotu OZ całkowity moment pędu otrzymamy sumując momenty pędu J_i

$$J_i = m_i\,r_i^2\,\omega \tag{74}$$

wszystkich punktów materialnych tworzących bryłę. Pamiętamy, przy tym, że prędkość kątowa każdego punktu bryły jest taka sama.

$$J = \sum_i (m_i r_i^2)\omega \tag{75}$$

Wykorzystując definicję (39) momentu bezwładności możemy napisać, że

$$J = I\,\omega \tag{76}$$

Tak więc *całkowity moment pędu bryły w ruchu obrotowym względem ustalonej osi obrotu jest równy iloczynowi momentu bezwładności tej bryły względem osi obrotu i szybkości kątowej bryły.*

Korzystając z definicji (28) przyspieszenia kątowego możemy drugą zasadę dynamiki dla ruchu obrotowego napisać w postaci:

$$M = I\,\varepsilon = I \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta(I\,\omega)}{\Delta t} \tag{77}$$

czyli

$$M = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta J}{\Delta t} \tag{78}$$

Jeżeli moment sił zewnętrznych M = 0, wtedy oczywiście

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta J}{\Delta t} = 0 \tag{79}$$

a z tego wynika, że

$$\Delta J = 0 \tag{80}$$

co oznacza, że moment pędu bryły się nie zmienia. Otrzymaliśmy **zasadę zachowania momentu pędu** dla ruchu obrotowego bryły wokół ustalonej osi:

jeżeli całkowity moment sił działający na ciało względem jego osi obrotu jest równy zero, wtedy jego moment pędu względem tej osi jest stały.

2.6 Energia kinetyczna ruchu obrotowego bryły

Energię kinetyczną ruchu obrotowego bryły o masie m obliczymy sumując energie kinetyczne wszystkich punktów materialnych składających się na bryłę. Masa i-tego punktu niech będzie m_i, a jego prędkość v_i. Położenie punktu określamy względem układu odniesienia związanego z osią obrotu w ten sposób, że początek układu pokrywa się z punktem wokół, którego bryła się obraca, a oś OZ pokrywa się z osią obrotu. Wykorzystamy tutaj związek

(20) między prędkością liniową punktu v i jego prędkością kątową ω.

Dla pojedynczego punktu P_i bryły mamy:

$$E_{ki} = \frac{m_i\, v_i^2}{2} = \frac{m_i\, \omega^2\, r_i^2}{2} = m_i\, r_i^2\, \frac{\omega^2}{2} \tag{81}$$

Sumując po wszystkich punktach i otrzymujemy:

$$E = \sum_i (m_i\, r_i^2)\, \frac{\omega^2}{2} \tag{82}$$

czyli

$$E = \frac{I\, \omega^2}{2} \tag{83}$$

gdzie I jest momentem bezwładności bryły względem osi obrotu. Wzór ten jest formalnie taki sam jak wzór na energię kinetyczną ciała w ruchu postępowym

$$E = \frac{m\, v^2}{2} \tag{84}$$

przy czym masie m ciała odpowiada tutaj moment bezwładności bryły I względem ustalonej osi obrotu.

Jeżeli ciało wykonuje jednocześnie obydwa ruchu; ruch obrotowy wokół ustalonej osi z prędkością kątową ω i ruch postępowy z prędkością v środka obrotu (na przykład koło toczące się bez poślizgu z prędkością v), wtedy całkowita energia kinetyczna bryły równa jest sumie energii kinetycznej ruchu postępowego i energii kinetycznej ruchu obrotowego bryły:

$$E = \frac{m\, v^2}{2} + \frac{I\, \omega^2}{2} \tag{85}$$

3 Zadania

Zadanie 1 *Wzdłuż równi pochyłej stacza się walec o średnicy* $2r = 5\,cm$. *Czas tego ruchu* $t_1 = 20\,s$, *przyspieszenie kątowe wynosi* $\varepsilon_1 = 7,5\,\frac{rad}{s^2}$. *W jakim czasie przebyłby tę samą drogę inny walec o średnicy* $2\,R = 6\,cm$, *mając przyspieszenie kątowe* $\varepsilon_2 = 4\,\frac{rad}{s^2}$*?*

Zadanie 2 *Kulka o masie* $m = 100\,g$ *zatacza w płaszczyźnie poziomej* $n = 7$ *okręgów o promieniu* $r = 45\,cm$ *w czasie* $t = 3\,s$. *Obliczyć napięcie nitki, do której jest przywiązana kulka.*

Zadanie 3 *Kulka o masie* $m = 80\,g$ *zatacza w płaszczyźnie poziomej okrąg o promieniu* $r = 50\,cm$. *Przy jakiej prędkości kątowej napięcie nitki, do której jest przywiązana kulka, wyniesie* $F = 4\,N$*?*

Zadanie 4 *Kulka, zawieszona na jedwabnej nici o powierzchni przekroju* $S = 0,3\,mm^2$ *i długości* $l = 49\,cm$, *zatacza okrąg w płaszczyźnie poziomej. Masa kulki jest* $m = 50\,g$, *wytrzymałość nitki jest* $F = 300\,\frac{N}{mm^2}$. *Przy jakiej prędkości kątowej nić ulegnie zerwaniu?*

Zadanie 5 *Na nitce o długości* $l = 60\,cm$ *wiruje w płaszczyźnie pionowej kamień o masie* $m = 50\,g$, *robiąc* $n = 3\,\frac{obr.}{s}$. *Obliczyć napięcie nitki w chwili, gdy kamień jest w najniższym i najwyższym punkcie.*

Zadanie 6 *Kamień wiruje w płaszczyźnie pionowej, zataczając okrąg o promieniu* $r = 80\,cm$. *Jaką prędkość ma kamień w najwyższym punkcie okręgu, jeżeli sznurek jest w tym momencie wyprostowany, ale nie napięty?*

Zadanie 7 *Łyżwiarz zatacza na poziomym torze okrąg o promieniu* $r = 5\,m$ *z prędkością* $v = 4\,\frac{m}{s}$. *Obliczyć kąt nachylenia tego łyżwiarza do poziomu.*

Zadanie 8 *Wagon kolejowy zatacza łuk o promieniu* $r = 84\,m$. *Rozstaw szyn jest* $a = 1,5\,m$, *środek ciężkości wagonu leży o* $h = 1,4\,m$ *ponad górnym poziomem szyn. Przy jakiej prędkości wagon ten wyskoczyłby z szyn?*

Zadanie 9 *Na pionowej osi wirówki umieszczono zgiętą dwukrotnie pod kątem prostym rurkę szklaną z cieczą w ten sposób, że jedno z ramion rurki było przedłużeniem osi wirówki, a drugie zataczało w czasie ruchu wirówki koło o promieniu* $r = 10\,cm$. *Obliczyć różnicę poziomów cieczy, gdy wirówka będzie wykonywała* $n = 1,5\,\frac{obr.}{s}$.

Zadanie 10 *Drążek o długości* $l = 0,45\,m$ *posiada ciężar* $P = 30\,N$. *Na jednym z jego końców znajduje się kulka o masie* $m = 0,105\,kg$. *Wyznaczyć położenie środka ciężkości drążka z kulką.*

Zadanie 11 *Wyznaczyć położenie środka ciężkości drutu o długości $l = 98\,cm$ zgiętego pod kątem prostym w punkcie odległym o $d = 42\,cm$ od końca drutu.*

Zadanie 12 *Z drutu zrobiono trójkąt równoramienny o bokach $a = 50\,cm$ i podstawie $b = 28\,cm$. Wyznaczyć położenie środka ciężkości tego trójkąta.*

Zadanie 13 *Sklejono sześcian o krawędzi $a = 10\,cm$ z dwóch prostopadłościennych drewnianych klocków o gęstościach: $\varrho_1 = 400\,\frac{kg}{m^3}$ i $\varrho_2 = 800\,\frac{kg}{m^3}$. Środek ciężkości leży w środku płaszczyzny ich sklejenia. Obliczyć wymiary obu tych klocków.*

Zadanie 14 *Z deski wycięto koło o promieniu $r_1 = 10\,cm$; w kole wycięto otwór kolisty o promieniu $r_2 = 5\,cm$, przy czym odległość wzajemna środków obu kół jest $d = 3\,cm$. Wyznaczyć środek ciężkości otrzymanego pierścienia.*

Zadanie 15 *Belka o długości $l = 2,5\,m$ i ciężarze $P = 60\,N$ opiera się końcami na dwóch ścianach. W odległości $d = 1,2\,m$ od końca belki wisi na niej ciężar $Q = 240\,N$. Jaki nacisk wywiera ta belka na każdą ze ścian?*

Zadanie 16 *Drążek o długości $l = 60\,cm$ obciążono na obu końcach ciężarkami $P = 6\,N$ i $Q = 4\,N$. W którym punkcie należy podeprzeć ten drążek, aby mógł on zachować równowagę(ciężar drążka pomijamy)?*

Zadanie 17 *Drut ABC zgięto w punkcie B pod kątem prostym, przy czym $AB = a = 20\,cm$ i $BC = b = 30\,cm$. Jaki kąt utworzy z pionem ramię AB, jeżeli drut zawiesimy na nitce w punkcie B?*

Zadanie 18 *Na końcach lekkiego drążka drewnianego o długości $l = 60\,cm$ umocowano dwie kulki ołowiane o masie $m = 200\,g$ każda. Obliczyć moment bezwładności tego drążka względem osi prostopadłej do niego i przechodzącej przez jego środek.*

Zadanie 19 *Cienki pręt ma masę $m = 150\,g$ i długość $l = 60\,cm$. Obliczyć moment bezwładności tego pręta względem osi prostopadłej do pręta i przechodzącej przez punkt odległy od jednego z jego końców o $d = 20\,cm$.*

Zadanie 20 *Cienką blachę o masie $m_1 = 160\,g$ zwinięto w walec o średnicy $2r = 20\,cm$. Na obu końcach walca przylutowano wewnątrz pręty metalowe o masie $m_2 = 30\,g$ każdy i skrzyżowane w środku pod kątem prostym. Następnie w punktach skrzyżowania prętów osadzono walec na poziomej osi. Na walec nawinięto cienką nitkę i przywiązano do jej końca ciężarek o masie $m = 5\,g$. Obliczyć przyspieszenie kątowe tego walca oraz przyspieszenie liniowe ciężarka, gdy zacznie on spadać (tarcie pomijamy).*

Zadanie 21 *Walec metalowy o średnicy* $2r = 8\,cm$ *osadzono na poziomej osi. Następnie nawinięto na ten walec cienką nitkę i przywiązano na jej końcu ciężarek o masie* $m = 16\,g$. *Zauważono, że w ciągu czasu* $t = 5\,s$ *ciężarek przebył drogę* $s = 109\,cm$. *Obliczyć moment bezwładności tego walca (tarcie pomijamy).*

Zadanie 22 *Obliczyć energię kinetyczną kuli o masie* $m = 500\,g$, *toczącej się z prędkością* $v = 2\,\frac{m}{s}$.

Zadanie 23 *Obliczyć prędkość końcową kuli, staczającej się bez tarcia po równi pochyłej z wysokości* $h = 49\,cm$.

Zadanie 24 *Pręt o masie* $m = 100\,g$ *i o długości* $l = 45\,cm$ *obraca się z prędkością kątową* $\omega = 4\,\frac{rad}{s}$ *dookoła osi, przechodzącej przez środek pręta i prostopadłej do niego. Obliczyć moment bezwładności tego pręta oraz jego energię kinetyczną.*

Zadanie 25 *Jaką pracę należy wykonać, aby zatrzymać koło zamachowe o masie* $m = 2000\,kg$ *i o promieniu* $r = 1\,m$, *wykonujące* $n = 50\,\frac{obr.}{min}$.